

# ANNALEN DER PHYSIK

Gegründet 1799 durch F. A. C. Gren und fortgeführt durch L. W. Gilbert, J. C. Poggendorff, G. und E. Wiedemann, P. Drude, W. Wien

Der ganzen Reihe 396. Band

Kuratorium:

F. Paschen      M. Planck      R. Pohl  
A. Sommerfeld    M. Wien    E. Warburg

Unter Mitwirkung  
der Deutschen Physikalischen Gesellschaft  
herausgegeben von

E. GRÜNEISEN, Marburg/L.  
M. PLANCK, Berlin



LEIPZIG / VERLAG VON JOHANN AMBROSIOUS BARTH

Im Jahre 1930 erscheinen die Bände 4, 5 und 6 mit je 8 Hefen. Der Abonnementspreis beträgt pro Band Rm. 28.— zuzüglich Rm. 1.60 für Porto bei direkter Zusendung für das Inland und Rm. 2.— für das Ausland. Redaktionsschluß am 24. Februar 1930.

# Inhalt

	Seite
A. Sommerfeld und G. Schur-München, Über den Photoeffekt in der K-Schale der Atome, insbesondere über die Voreilung der Photoelektronen. (Mit 4 Figuren) . . . . .	409
G. Schur-München, Zur Richtungsverteilung der Photoelektronen der L-Schale . . . . .	433
H. Bethe-München, Über die nichtstationäre Behandlung des Photoeffekts. . . . .	443
D. van Gulik-Wageningen i. Holl., Über das ultraviolette Absorptionsspektrum des Chlorophylls. (Mit 1 Figur) . . . . .	450
H.-J. Cohn-Peters und Fritz Lange-Berlin, Statistische Schwankungen der quantenhaften Absorption von Röntgenstrahlen. (Mit 4 Figuren) . . . . .	453
G. I. Prokowsky und E. A. Gordon-Moskau, Über den Zusammenhang zwischen Intensität, Polarisation und Ablenkungswinkel bei der Ramanstrahlung . . . . .	488
Willi M. Cohn-Berlin, Über Normalmaterialien für Ausdehnungsmessungen an festen Körpern bis zu 1400° C. (Mit 4 Figuren) . . . . .	493
K. Schuster-Breslau, Zur Theorie des Tonraumes. (Mit 9 Figuren) . . . . .	513

Die Redaktion der Annalen wird von den auf der Titelseite genannten Herren besorgt. Es wird gebeten, Manuskripte an Herrn **Geh.-Rat Prof. Dr. E. Grünelsen, Marburg/L., Mainzer Gasse 33**, einzusenden.

Die Redaktion bittet, die Manuskripte **druckfertig** einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Für die Aufnahme von Dissertationen gelten besondere Bedingungen, welche vom Verlag bekanntgegeben werden.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 **Sonderabdrücke** jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Mitglieder der Deutschen Physikalischen Gesellschaft können die Annalen zu einem Vorzugspreis beziehen.

Anderweitiger **Abdruck** der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Den zur Veröffentlichung eingereichten Abhandlungen ist die Mitteilung beizufügen, daß eine Publikation an anderer Stelle nicht erfolgt ist.

Die **Zeichnungen** sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzeichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Bei den **Zitaten** wolle man die Abkürzungen der Zeitschriftentitel nach dem Verzeichnis wählen, welches jedem Jahrgang der „Physikalischen Berichte“ vorangestellt ist.







# ANNALEN DER PHYSIK

5. FOLGE, 1930, BAND 4, HEFT 4

## *Über den Photoeffekt in der K-Schale der Atome, insbesondere über die Voreitung der Photoelektronen*

*Von A. Sommerfeld und G. Schur*

(Mit 4 Figuren)

In dem „wellenmechanischen Ergänzungsband“ zu Atombau und Spektrallinien wurde, im engen Anschluß an Wentzel<sup>1)</sup> der Photoeffekt im Grundzustande des *H*-Atoms behandelt. Unter der Annahme langwelligen Lichts wurde das Wentzel'sche Resultat, nämlich die Verteilungsfunktion

$$(1) \quad J \sim \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi$$

bestätigt, wo  $\vartheta$  den Winkel zwischen Photoemission und Strahlrichtung (*x*-Achse) und  $\varphi$  den Winkel um die Strahlrichtung bedeutet. Das Licht wird dabei als polarisiert vorausgesetzt (Richtung des elektrischen Vektors in der *y*-Achse

$\vartheta = \frac{\pi}{2}$ ,  $\varphi = 0$ . Bei unpolarisiertem Licht fällt natürlich der Faktor  $\cos^2 \varphi$  in (1) und in den folgenden Formeln fort). Das Vektorpotential des Lichtfeldes, welches die Störungsfunktion des Atomzustandes definiert, wird demgemäß angesetzt in der Form

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{A} &= A_y = A \cos 2\pi \left( \nu t - \frac{x}{\lambda} \right) \\ &= \frac{A}{2} \left( e^{-2\pi i \nu t} e^{2\pi i \frac{x}{\lambda}} + e^{+2\pi i \nu t} e^{-2\pi i \frac{x}{\lambda}} \right). \end{aligned} \right.$$

Bei gewöhnlichem, langwelligen Licht kann für die Störungsrechnung  $\exp \left( \pm 2\pi i \frac{x}{\lambda} \right)$  durch 1 ersetzt werden.

1) G. Wentzel, Ztschr. f. Phys. 41. S. 828. 1927.

Anders im Falle kurzwelligen Lichts (Röntgenstrahlung). Dann muß in der Reihenentwicklung der genannten Exponentialfunktion mindestens noch das Glied von der Ordnung  $x/\lambda$  beibehalten werden. Dadurch tritt auch in der Formel (1) ein Zusatzglied auf. Man erhält nämlich

$$(3) \quad J \sim (1 + \gamma \cos \vartheta) \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi.$$

Die Verteilungsfunktion, die nach (1) symmetrisch um die Polarisationsrichtung des auffallenden Lichts verläuft, wird jetzt unsymmetrisch, und zwar *im Sinne des Lichtstrahls nach vorn* verschoben. Die Größe dieser Verschiebung ist von aktuellem Interesse, da sie den Gegenstand mehrerer experimenteller Arbeiten mit der Wilson-Kammer bildet (Auger, Kirchner, Williams-Nuttal-Barlow). Man vergleicht diese Verschiebung  $\gamma$  passend mit derjenigen Verschiebung  $\gamma_0$ , welche das emittierte Photoelektron klassisch durch den Strahlungsdruck des Lichts erfahren würde (Zusammensetzung des Elektronen-Impulses mit dem Impuls des Lichtquants). Zunächst wird man mit Wentzel erwarten:  $\gamma = \gamma_0$ . Demgegenüber lieferte eine erste wellenmechanische Berechnung<sup>1)</sup>

$$\gamma = \frac{9}{5} \gamma_0.$$

Diese Berechnung war aber aus zwei Gründen inkorrekt: Einmal war die Normierung der Eigenfunktionen nicht konsequent durchgeführt; sodann wurde nicht genügend unterschieden zwischen den eigentlichen Eigenfunktionen (stehende Welle ohne Singularität) und den beiden charakteristischen Bestandteilen, in die man sie zerlegen kann (divergierende und konvergierende Welle mit Singularität im Zentrum des Atoms). Diese Versehen sollen im folgenden berichtet werden. Das Ergebnis lautet jetzt:

$$\gamma = 2 \gamma_0.$$

*Das Photoelektron nimmt also merkwürdigerweise im Mittel doppelt so viel Vorwärts-Impuls auf, als es von der Strahlung erhält*, derart, daß das Atom selbst einen Rückstoß im einfachen Betrage des Strahlungsimpulses erfahren muß. Die genannten Experimentalarbeiten, soweit sie sich auf die K-Schale

1) Ergänzungsband Kap. II § 4, im folgenden mit E § 4 zitiert.

verschiedener Atome beziehen, sind hiermit im Einklang (wobei übrigens der frühere Faktor  $9/5$  noch etwas besser zu stimmen schien, als der jetzige Faktor 2).

In der nächsten Arbeit (G. Schur) soll die Berechnung der Verteilungsfunktion auch für die L-Schale gegeben werden. In der übernächsten Arbeit (H. Bethe) wird gezeigt, daß die nicht stationäre Behandlung, bei der das zeitliche Einsetzen der Photoemission betrachtet wird, dieselben Resultate liefern muß, wie die hier benutzte stationäre Behandlung.

### § 1. Rekapitulation des allgemeinen Ansatzes

Der Anfangszustand des Atoms sei

$$(4) \quad u = u_k = \psi_k e^{-\frac{2\pi i}{h} E_k t},$$

wobei  $E_k$  und  $\psi_k$  auf die K-Schale (Grundzustand) hinweisen möge. Dieser Zustand wird durch die auffallende Lichtwelle gestört.

Die Differentialgleichung des gestörten Zustandes ist

$$(5) \quad \Delta u + \frac{4\pi i \mu}{h} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{8\pi^2 \mu}{h^2} V u = -\frac{4\pi i e}{hc} (\mathfrak{A} \text{ grad } u),$$

Nach (2) wird die rechte Seite in hinreichender Näherung ( $u = u_k$  gesetzt):

$$(6) \quad \mathfrak{x} \left( e^{-\frac{2\pi i}{h} (E_k + h\nu)t} e^{\frac{2\pi i}{h} \frac{x}{\lambda}} + e^{-\frac{2\pi i}{h} (E_k - h\nu)t} e^{-\frac{2\pi i}{h} \frac{x}{\lambda}} \right) \frac{\partial \psi_k}{\partial y};$$

$\mathfrak{x}$  hat die Bedeutung

$$\mathfrak{x} = -\frac{2\pi i e}{hc} A$$

und wird wegen des Faktors  $A$  als kleine Größe behandelt. Auf der linken Seite von (5) setzen wir mit Rücksicht auf die Zeitabhängigkeit der rechten Seite

$$(7) \quad u = u_k + \mathfrak{x} \left( w_+ e^{-\frac{2\pi i}{h} (E_k + h\nu)t} + w_- e^{-\frac{2\pi i}{h} (E_k - h\nu)t} \right)$$

und finden die Gleichungen

$$(7a) \quad \Delta w_{\pm} + \frac{8\pi^2 \mu}{h^2} (E_k + h\nu - V) w_{\pm} = \frac{\partial \psi_k}{\partial y} e^{\pm 2\pi i \frac{x}{\lambda}}.$$

Wir interessieren uns für den Fall, daß Resonanz zwischen der auffallenden Frequenz und einer Frequenz des kontinuierlichen Spektrums stattfindet. Die Gleichung für  $w_{\pm}$  hat dann

im allgemeinen keine quadratisch integrierbare Lösung. Wir können aber Gleichung (7a) formal erfüllen und werden erwarten, daß die so erhaltene Lösung die bei stationärem Photostrom sich ergebende Dichteverteilung darstellt. Nach der in Schrödingers Dispersionstheorie vorgezeichneten Methode<sup>1)</sup> ergibt sich:

$$(8) \quad w_{\pm} = \frac{h^2}{8\pi^2\mu} \sum^{(j)} \frac{A_j^{\pm} \psi_j}{E_k - E_j \pm h\nu} + \frac{h^2}{8\pi^2\mu} \int d\varepsilon \frac{A^{\pm}(\varepsilon) \psi(\varepsilon)}{E_k - \varepsilon \pm h\nu}.$$

Das erste Glied rechts bezieht sich auf die diskreten Eigenfunktionen  $\psi_j$  des ungestörten Atoms und die zugehörigen Eigenwerte  $E_j$  ( $j = 0, 1, 2, \dots$ ), das zweite auf die kontinuierlichen Eigenfunktionen  $\psi(\varepsilon)$  und Eigenwerte  $\varepsilon$  ( $E_0 \leq \varepsilon < \infty$ ,  $E_0$  = obere Grenze des diskreten Spektrums =  $m_0 c^2$  beim Wasserstoffatom). Die  $A$  bedeuten Entwicklungskoeffizienten nach Eigenfunktionen der in (6) erhaltenen Ortsfunktionen, nämlich

$$(9) \quad \begin{cases} A_j^{\pm} = \int e^{\pm 2\pi i \frac{x}{\lambda}} \frac{\partial \psi_k}{\partial y} \psi_j^* d\tau, \\ A^{\pm}(\varepsilon) = \int e^{\pm 2\pi i \frac{x}{\lambda}} \frac{\partial \psi_k}{\partial y} \psi^*(\varepsilon) d\tau. \end{cases}$$

Wir haben uns zunächst über den in (8) zu benutzenden Integrationsweg schlüssig zu machen. Jedenfalls darf die Integration nicht längs der reellen Achse geführt werden, weil hier der Nenner in  $w_{\pm}$  für

$$\varepsilon = E_k + h\nu$$

verschwindet. Der Integrationsweg muß also diesem Punkte im Komplexen ausweichen. Der Sinn des Ausweichens wäre mathematisch belanglos, wenn es sich nämlich nur darum handeln würde, überhaupt eine Lösung der Gl. (7a) anzugeben. Wir werden aber sogleich sehen, daß der fragliche Sinn durch eine hinzukommende physikalische Bedingung bestimmt ist, welche zwischen den mathematisch möglichen Lösungen unterscheidet.

Anregung im kontinuierlichen Spektrum bedeutet bekanntlich *Elektronenemission*. Wir interessieren uns daher für das zweite Glied von (8), insbesondere für den Bestandteil derselben

$$(10) \quad H = \int d\varepsilon \frac{A^{\pm}(\varepsilon) \psi(\varepsilon)}{E_k - \varepsilon \pm h\nu},$$

1) Vgl. auch E § 3 und 4.

welcher nach (7) mit dem Zeitfaktor

$$(11) \quad \exp \left\{ -\frac{2\pi i}{h} (E_k + h\nu) t \right\}$$

behaftet ist. Letzterer bedeutet, wie bekannt<sup>1)</sup>, das Einsteinsche Gesetz der Photoemission. Das entsprechend mit  $A^-$  und  $-h\nu$  gebildete Integral liefert, wie wir später sehen werden, keinen Beitrag zur Photoemission.

Wir schreiben (10) in Polarkoordinaten ausführlicher

$$(12) \quad H = \sum_{l,m} \int d\varepsilon \frac{A_{l,m}^{+}(\varepsilon) \psi_{l,m}(\varepsilon; r, \vartheta, \varphi)}{E_k + h\nu - \varepsilon}.$$

Die Eigenfunktionen  $\psi$  hängen nämlich außer von dem kontinuierlichen Parameter  $\varepsilon$ , welcher der Hauptquantenzahl bzw. der radialen Quantenzahl entspricht, auch von den azimuthalen Quantenzahlen  $l$  und  $m$  ab, und zwar in diskreter Form. Da unsere obige Entwicklung das vollständige System der Eigenfunktionen zu berücksichtigen hat, ist nicht nur über  $\varepsilon$  zu integrieren, sondern auch über  $l$  und  $m$  zu summieren.

Als komplexe Variable empfiehlt sich in (11) oder (12) an Stelle von  $\varepsilon$  die Wellenzahl  $k$ , die der kinetischen Energie  $\varepsilon - E_0$  wellenmechanisch zugeordnet ist, vermöge der Gleichung

$$(13) \quad k^2 = \frac{8\pi^2\mu}{h^2} (\varepsilon - E_0).$$

Man hat dann für das Differential in  $H$

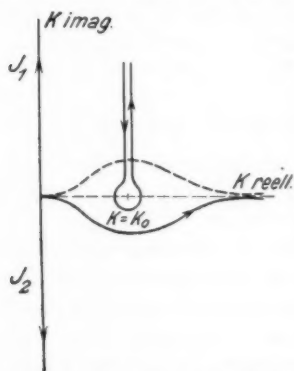
$$(14) \quad \frac{d\varepsilon}{E_k + h\nu - \varepsilon} = \frac{2k dk}{k_0^2 - k^2}.$$

Die hier im Nenner vorkommende Wellenzahl  $k_0$  ist dem besonderen Werte der Einsteinschen photoelektrischen Energie ebenso zugeordnet, wie  $k$  der kinetischen Energie im allgemeinen. In der komplexen  $k$ -Ebene führt der Integrationsweg wegen (13) von  $k=0$  nach  $k=\infty$ , unter Vermeidung der singulären Stelle  $k_0$  (vgl. Fig. 1).

Wir kommen nun zu der „Ausstrahlungsbedingung“, welche den Integrationsweg qualitativ bestimmt. Offenbar ist es physi-

1) Vgl. z. B. *E* § 4, Gl. (6) oder G. Beck, *Ztschr. f. Phys.* **41**, S. 443, 1927. Es muß ja wellenmechanisch sein:  $E_k + h\nu =$  Gesamtenergie des ausstrahlenden Elektrons  $= E_0 + E_{kin}$ , also  $E_{kin} = h\nu - (E_0 - E_k) = h\nu - P$ , wo  $P$  die Ionisierungsspannung des Atoms ist.

kalisch sinnvoll, zu verlangen, daß zwar Elektronenwellen vom Atom ins Unendliche ausstrahlen, aber nicht vom Unendlichen her einstrahlen können<sup>1)</sup>. Der Beitrag des diskreten Spektrums



Integration über das kontinuierliche Spektrum der Eigenwerte. Deformation des Integrationsweges.

Fig. 1

näher über die Natur der kontinuierlichen Eigenfunktionen  $\psi$  orientieren.

## § 2. Über die kontinuierlichen Eigenfunktionen im Wasserstoffspektrum, ihre asymptotische Darstellung und Zerlegung in zwei Teilfunktionen<sup>2)</sup>

Der radiale Teil  $R$  der *diskreten* Eigenfunktionen im Wasserstoffspektrum wird bekanntlich, von dem Normierungsfaktor abgesehen, dargestellt durch

$$(15) \quad R = \varrho^l e^{-\frac{\varrho}{2}} \frac{d^{2l+1}}{d\varrho^{2l+1}} L_{n+l}, \quad \varrho = 2r \sqrt{\frac{8\pi^2\mu}{h^2}(E_0 - E)}.$$

Das „Laguerresche Polynom“  $L$  ist gegeben durch

$$(16) \quad L_n(\varrho) = e^\varrho \frac{d^n}{d\varrho^n} (\varrho^n e^{-\varrho}).$$

1) Vgl. A. Sommerfeld, Jahresbericht d. deutsch. Math. Vereinigung 21. S. 309, Teil B, Cap. II.

2) Dieser Paragraph deckt sich in der Hauptsache mit Arbeiten von Schrödinger, Fues, Sugiura usw. Aber die hier befolgte Methode scheint einfacher zu sein als in den genannten Arbeiten und ist uns für das Folgende unentbehrlich.

Im diskreten Spektrum  $E < E_0$  ist  $\rho$  reell und  $n$  ganz. Dagegen wird  $\rho$  im *kontinuierlichen* Spektrum  $E > E_0$  imaginär,  $n$  ebenfalls imaginär und nicht-ganz. Aus (15) folgt nämlich für  $E - E_0 = \frac{\mu v^2}{2} > 0$ .

$$(17) \quad \rho = 2ir \frac{2\pi\mu v}{h} = 2ikr, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \lambda = \frac{h}{\mu v}.$$

Andererseits schließt man aus dem Zusammenhang von  $n$  mit der Balmerformel leicht für  $E > E_0$  (wir denken an einen  $Z$ -fach geladenen Kern):

$$(18) \quad n = \frac{Z}{iak}, \quad a = \frac{h^2}{4\pi^2\mu e^2}.$$

Die Darstellung (2) ist nur für ganzes  $n$  zu verwenden. Man kann sie aber nach dem Cauchyschen Satze umschreiben in eine für beliebiges  $n$  gültige Formel. Nach diesem Satze ist ja

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(z)}{z-x} dz$$

und daher

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} = \frac{\Gamma(n+1)}{2\pi i} \int \frac{f(z)}{(z-x)^{n+1}} dz.$$

Wir haben daher die für beliebige  $n$  gültige Darstellung:

$$(19) \quad L_n(\rho) = \Gamma(n+1)e^\rho \frac{1}{2\pi i} \int z^n e^{-z}(z-\rho)^{-n-1} dz.$$

Das Integral ist hier auf einem geschlossenen Wege in der komplexen  $z$ -Ebene zu führen, der den Punkt  $z = \rho$  umschließt und außerdem den Punkt  $z = 0$ , der ebenso wie  $z = \rho$  bei ungeradem  $n$  ein Verzweigungspunkt des Integranden in (19) ist.

Wir ändern die Integrationsvariable um in

$$x = z - \rho$$

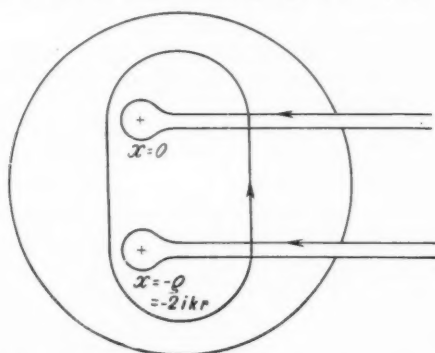
und können statt (19) etwas einfacher schreiben

$$(20) \quad L_n(\rho) = \Gamma(n+1) \frac{1}{2\pi i} \int (x+\rho)^n x^{-n-1} e^{-x} dx,$$

wobei das Integral jetzt um die Verzweigungspunkte  $x = 0$  und  $x = -\rho$  zu erstrecken ist. Von hier aus erhalten wir eine allgemein gültige Integraldarstellung für  $R$  in (15), wenn wir  $n$  durch  $n+l$  ersetzen und die  $(2l+1)$ -malige Differentiation nach  $\rho$  ausführen. Lassen wir noch einen konstanten, aus  $\Gamma$ -Funktionen zusammengesetzten Faktor fort und fügen eine für das Folgende bequeme Potenz von  $i$  hinzu, so ergibt sich:

$$(21) \quad R = (-i \varrho)^l e^{-\frac{\varrho}{2}} \frac{1}{2\pi i} \int (x + \varrho)^{n-l-1} x^{-n-l-1} e^{-x} dx.$$

Es ist nach der Herleitung dieses Ausdrucks selbstverständlich und kann unschwer verifiziert werden, daß (21) der Wellengleichung ebenso genügt wie die Ausgangsformel (15).



Integraldarstellung des radialen Bestandteils der Eigenfunktion, Zerlegung der Eigenfunktion in zwei Teilfunktionen, entsprechend der Zerlegung des geschlossenen Integrationsweges in zwei Schleifen.

Fig. 2

Das Integral in (21) läßt sich in eine konvergente Reihe nach aufsteigenden Potenzen von  $\varrho$  entwickeln. Man hat nur zu setzen:

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} (x + \varrho)^{n-l-1} &= x^{n-l-1} \left( 1 + \binom{n-l-1}{1} \frac{\varrho}{x} \right. \\ &\quad \left. + \binom{n-l-2}{2} \frac{\varrho^2}{x^2} + \dots \right). \end{aligned} \right.$$

Diese Reihe ist absolut konvergent, da man den Integrationsweg in der  $x$ -Ebene (Fig. 2) stets so führen kann, daß  $|x| > |\varrho|$  ist. Man erhält so für das Integral in (21) bei abermaliger Anwendung des Cauchyschen Satzes:

$$\begin{aligned} \int \frac{e^{-x}}{x^{2l+2}} dx + \binom{n-l-1}{1} \varrho \int \frac{e^{-x} dx}{x^{2l+3}} + \binom{n-l-2}{2} \varrho^2 \int \frac{e^{-x} dx}{x^{2l+4}} \\ + \dots = -2\pi i \left( \frac{1}{(2l+1)!} - \binom{n-l-1}{1} \frac{\varrho}{(2l+2)!} \right. \\ \left. + \binom{n-l-2}{2} \frac{\varrho^2}{(2l+3)!} + \dots \right). \end{aligned}$$



Eintragen in (21) liefert die für alle  $\varrho$  konvergente Reihe

$$(23) \quad \left\{ \begin{aligned} R &= -(-i\varrho)^l e^{-\frac{\varrho}{2}} \left( \frac{1}{(2l+1)!} \right. \\ &\quad \left. - \binom{n-l-1}{1} \frac{\varrho}{(2l+2)!} + \dots \right) \end{aligned} \right.$$

Der geschlossene Integrationsweg der Fig. 2 kann in zwei Schleifen zerlegt werden, die im Unendlichen beginnen und endigen und nur je einen der beiden Verzweigungspunkte  $x = 0$  bzw.  $x = -\varrho$  umlaufen. Entsprechend dieser Zerlegung des Integrationsweges zerlegt sich  $R$  in zwei Teile. Wir setzen

$$(24) \quad R = \frac{1}{2}(R^1 + R^2)$$

und definieren  $R^1$  durch die Schleife um  $x = -\varrho$ ,  $R^2$  durch diejenige um  $x = 0$ . Diese Zerlegung ist analog zu der aus der Theorie der Besselschen Funktionen bekannten Zerlegung

$$J_n = \frac{1}{2}(H_n^1 + H_n^2).$$

Ebenso wie  $H^1$  und  $H^2$  sind  $R^1$  und  $R^2$  im Nullpunkte singular, während ihre Summen, nämlich  $J$  bzw.  $R$ , sich regulär verhalten. Diese Singularität bzw. Regularität folgt unmittelbar aus der Form des Integrationsweges: bei  $R^1$  und  $R^2$  ist der Weg zwischen die beiden singulären Punkte eingeschlossen und geht für  $\varrho = 0$  durch diese hindurch, bei  $R$  ist der Integrationsweg frei.

Wir untersuchen zunächst das asymptotische Verhalten von  $R^2$  beim Grenzübergange  $\varrho \rightarrow \infty$ . Dazu setzen wir im Gegensatz zu (22)

$$(25) \quad \left\{ \begin{aligned} (x + \varrho)^{n-l-1} &= \varrho^{n-l-1} \left( 1 + \binom{n-l-1}{1} \frac{x}{\varrho} \right. \\ &\quad \left. + \binom{n-l-2}{2} \frac{x^2}{\varrho^2} + \dots \right) \end{aligned} \right.$$

Diese Entwicklung ist für die entfernteren Teile des Schleifenintegrals divergent, da hier ersichtlich  $|x| > |\varrho|$  wird. Deshalb wird auch die folgende asymptotische Entwicklung divergent (semikonvergent).

Eintragen in (21) liefert mit Rücksicht auf (24), wenn die Integration auf der Schleife um  $x = 0$  geführt wird:

$$(26) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{2} R^2 &= \varrho^{n-1} e^{-\frac{\varrho}{2}} \frac{(-i)^l}{2\pi i} \left( \int \frac{e^{-x}}{x^{n+l+1}} dx \right. \\ &\left. + \binom{n-l-1}{1} \frac{1}{\varrho} \int \frac{e^{-x}}{x^{n+l}} dx + \dots \right). \end{aligned} \right.$$

Die hier verbleibenden Integrale sind  $\Gamma$ -Funktionen. Es gilt nämlich bei beliebigem (auch imaginären)  $n$

$$(27) \quad \frac{1}{\Gamma(n+1)} = \frac{e^{i\pi n}}{2\pi i} \int \frac{e^{-x}}{x^{n+1}} dx.$$

Diese Formel ist für ganze  $n$  wegen des Cauchyschen Satzes evident und liefert für nicht-ganze  $n$  die einfachste Definition von  $\Gamma$ . Der Integrationsweg in (27) ist die Schleife der Fig. 2 um  $x = 0$ , mit der Bestimmung, daß auf dem oberen Zweige des Weges in  $x^n = \exp(n \log x)$  der Logarithmus reell genommen werden soll. Gl. (26) geht also über in

$$\frac{1}{2} R^2 = \frac{\varrho^{n-1} e^{-\varrho/2} e^{-i\pi \left(n + \frac{3}{2}l\right)}}{\Gamma(n+l+1)} \left( 1 - \binom{n-l-1}{1} \frac{\Gamma(n+l+1)}{\Gamma(n+l)} \frac{1}{\varrho} + \dots \right)$$

und hierfür kann man schreiben:

$$(28) \quad \frac{1}{2} R^2 = \frac{e^{-\varrho/2 + n \log \varrho - i\pi n + \frac{i\pi}{2}l}}{\varrho \Gamma(n+l+1)} \left( 1 - \binom{n-l-1}{1} \frac{n+l}{\varrho} + \dots \right),$$

oder wegen der Bedeutung von  $\varrho$  und  $n$ , Gl. (17) und (18):

$$(29) \quad R^2 = C \frac{e^{-i(kr+a)}}{r} (1 - \dots) \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha &= \frac{Z}{ak} \log 2kr \\ C &= \frac{1}{ik} \frac{\exp\left(-\frac{\pi}{2} \frac{Z}{ak} + \frac{i\pi l}{2}\right)}{\Gamma(n+l+1)}. \end{aligned} \right.$$

Wir kommen zu dem anderen Bestandteil  $R^1$ . Dabei ist es bequem, die Substitution  $x = z - \varrho$ , die uns von (19) zu (20) und (21) führte, rückgängig zu machen. Die Schleife um  $x = -\varrho$  geht dann in eine Schleife um  $z = 0$  über, aber man muß bedenken, daß, wenn man in der  $x$ -Ebene um  $x = 0$  herumgelaufen ist, man nach (21) den Faktor

$$\exp(2\pi i(-n-l-1)) = \exp(-2\pi i n)$$

aufgenommen hat. Mit diesem hat man also das Integral um die Schleife  $x = -\varrho$  zu multiplizieren, damit die Summe beider Schleifen, wie wir verlangen, dem geschlossenen Umgang in Fig. 2 äquivalent sei. Man erhält so:

$$\frac{1}{2} R^1 = (-i\varrho)^l e^{+e/2} \frac{e^{-2\pi i n}}{2\pi i} \int z^{n-l-1} (z - \varrho)^{-n-l-1} e^{-z} dz.$$

Hieraus mit

$$(z - \varrho)^{-n-l-1} = (-\varrho)^{-n-l-1} \left( 1 - \binom{-n-l-1}{1} \frac{z}{\varrho} + \dots \right)$$

und mit Rücksicht auf die Definition der  $F$ -Funktion in Gl. (27):

$$(30) \quad \frac{1}{2} R^1 = \frac{e^{e/2 - n \log(-\varrho) - i\pi n - \left(\frac{i\pi}{2}\right)^l}}{-\varrho \Gamma(-n+l+1)} \left( 1 - \binom{-n-l-1}{1} \frac{-n+l}{-\varrho} + \dots \right)$$

(30) entsteht aus (28) durch Vertauschung von  $\varrho, n, i$  mit  $-\varrho, -n, -i$ ; da  $\varrho$  und  $n$  rein imaginär sind, so heißt das, daß  $R^1$  und  $R^2$  konjugiert imaginär sind. Infolgedessen gilt Gl. (29) auch für  $R^1$ , wenn man darin  $+i$  mit  $-i$  vertauscht; man hat daher:

$$(31) \quad R^1 = C^* \frac{e^{i(kr+a)}}{r} (1 - \dots);$$

$\alpha$  ist dieselbe Größe wie in (29),  $C^*$  ist konjugiert zu  $C$ .

Man kann den Ausdruck für  $R$  symmetrischer schreiben, wenn man in (21) statt  $x$  die neue Integrationsvariable  $\xi$  eingeführt durch

$$x = \varrho \left( \xi - \frac{1}{2} \right).$$

Dann entsteht aus (21):

$$(32) \quad R = \frac{(i\varrho)^{-l-1}}{2\pi} \int \left( \xi + \frac{1}{2} \right)^{n-l-1} \left( \xi - \frac{1}{2} \right)^{-n-l-1} e^{-e\xi} d\xi.$$

Hier umläuft der Integrationsweg (vgl. Fig. 3) die beiden Verzweigungspunkte  $\xi = \pm \frac{1}{2}$ . Es ist möglich, aber nicht ratsam, ihn auf die reelle Achse von  $\xi = -\frac{1}{2}$  bis  $\xi = +\frac{1}{2}$  zusammenzuziehen. Man erkennt aus dieser Darstellung leicht, daß  $R$  für rein imaginäres Argument  $\varrho$ , Gl. (17), reell ist, was mit dem konjugierten Verhalten der beiden asymptotischen Darstellungen (30), (31) übereinstimmt.

Ebenso wie wir  $R$  in  $R^1$  und  $R^2$  zerlegt haben, zerlegt sich nun  $\psi$  in zwei Teilfunktionen  $\psi^1$  und  $\psi^2$ :

$$(33) \quad \psi = \frac{1}{2}(\psi^1 + \psi^2),$$

vgl. (24). Indem wir die Winkelabhängigkeit von  $\psi$  schreiben,

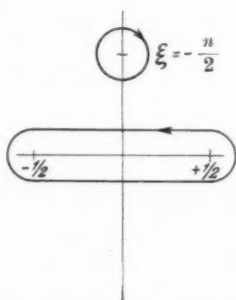
$$\psi = R P_l^m(\cos \vartheta) \frac{\cos}{\sin} m \varphi$$

haben wir auch

$$\psi^1 = R^1 P_l^m(\cos \vartheta) \frac{\cos}{\sin} m \varphi, \quad \psi^2 = R^2 P_l^m(\cos \vartheta) \frac{\cos}{\sin} m \varphi$$

mit den asymptotischen Darstellungen, vgl. (31) und (29):

$$(34) \quad \begin{cases} \psi^1 = C^* \frac{e^{i(kr+a)}}{r} P_l^m(\cos \vartheta) \frac{\cos}{\sin} m \varphi, \\ \psi^2 = C \frac{e^{-i(kr+a)}}{r} P_l^m(\cos \vartheta) \frac{\cos}{\sin} m \varphi. \end{cases}$$



Symmetrische Anordnung der Integration bei der Darstellung der radialen Eigenfunktionen; der Pol  $\xi = -\frac{n}{2}$  gehört nicht zur Darstellung der Eigenfunktion.  
Fig. 3

Angesichts des unser Integral  $J^+$ , Gl. (10), multiplizierenden Zeitfaktors in Gl. (7), nämlich:

$$e^{\frac{-2\pi i}{h}(E_k + h\nu)t}$$

bedeutet  $\psi^1$  eine nach dem Unendlichen *divergierende*,  $\psi^2$  eine nach dem Atom *konvergierende* Welle.

Schließlich hätten wir noch von dem Normierungsfaktor  $N$  der Eigenfunktion  $\psi$  zu handeln, der sich nach unserer Zerlegung gleichermaßen auf  $\psi^1$  und  $\psi^2$  überträgt. Da wir aber hierüber nichts zu sagen haben, was nicht schon bei Fues<sup>1)</sup> steht, so wollen wir den Wert von  $N$  hier direkt für späteren Gebrauch hinschreiben. Er ist in unseren Bezeichnungen:

$$(35) \quad N^2 = 2(2l+1) \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \frac{2\mu k}{h^2} e^{\frac{\pi Z}{ak}} |\Gamma(n+l+1)|^2.$$

Hier beziehen sich die beiden ersten Faktoren auf die Normierung der Winkelabhängigkeit, die übrigen Faktoren auf

1) E. Fues, Ann. d. Phys. 87. S. 281. 1926, insbes. § 3.

die der radialen Abhängigkeit von  $\psi$ , bzw.  $\psi^1$ ,  $\psi^2$ . Der Faktor 2 gilt für  $m > 0$  und wäre für  $m = 0$  durch 1 zu ersetzen.

### § 3. Ausführung der Integration über das kontinuierliche Spektrum

Wir schreiben unser Integral (10) für  $H$  mit Rücksicht auf (14) und (33):

$$(36) \quad H = H^1 + H^2, \quad H^{1,2} = \int \frac{k \, dk}{k_0^2 - k^2} A^\pm \psi^{1,2}$$

und benutzen als Integrationsweg, wie am Ende von § 1 verabredet wurde, den ausgezogenen (unteren) Weg in Fig. 1.

Nach Gl. (34) verschwindet  $\psi^1$  im Unendlichen der positiven,  $\psi^2$  im Unendlichen der negativen imaginären Halbebene. Allerdings enthält auch der Faktor  $A$  vermöge seiner Definition durch das Raumintegral (9) implizite den Faktor  $\psi$ . Aber der Wert von  $r$  in diesem Raumintegral — wir nennen ihn  $r'$  und haben  $0 < r' < \infty$  — ist im allgemeinen kleiner als der Wert von  $r$ , der zu den in (35) explizite vorkommenden  $\psi^1$ ,  $\psi^2$  gehört, da wir letzteren asymptotisch ins Unendliche gehen lassen werden. Für das Verhalten im Unendlichen der  $k$ -Ebene sind daher nur die Teilfunktionen  $\psi^1$  und  $\psi^2$  maßgebend. Wir können daraufhin  $H^1$  nach der positiven,  $H^2$  nach der negativen imaginären Halbebene überführen. Dabei bleibt  $H^1$  an dem singulären Punkte  $k = k_0$  hängen (vgl. Fig. 1). Außerdem entstehen aus  $H^1$  und  $H^2$  die beiden Integrationen nach der positiven und negativen imaginären Achse, die in Fig. 1 mit  $J_1$  und  $J_2$  bezeichnet sind. Diese verschwinden aber nach (34) bei hinreichend großem  $r$  exponentiell. Es bleibt also nur das Residuum im Punkte  $k = k_0$  übrig, welches nach (36) für  $r \rightarrow \infty$  beträgt:

$$(36a) \quad H = H^1 = -\pi i A^+(\varepsilon_0) \psi^1(\varepsilon_0).$$

$\varepsilon_0$  ist die durch (13) definierte, zu  $k = k_0$  gehörende Stelle des kontinuierlichen Spektrums. Indem wir die Darstellung von  $H$  im Sinne der Gl. (11) vervollständigen, schreiben wir hierfür ausführlicher:

$$(37) \quad H = -\pi i \sum_{l,m} A_{lm}^+(\varepsilon_0) \psi_{lm}^1(\varepsilon_0; r, \vartheta, \varphi).$$

Wir haben sodann von dem in  $w_-$ , Gl. (8), vorkommenden Integral

$$H_- = \int d\varepsilon \frac{A^-(\varepsilon) \psi(\varepsilon)}{E_k - \varepsilon - h\nu}$$

zu sprechen. Der Nenner in diesem Integral verschwindet nicht zwischen  $E_0 \leq \varepsilon < \infty$ , denn für die Nullstelle dieses Nenners gilt:

$$\varepsilon = E_k - h\nu < E_0.$$

In der  $k$ -Ebene, Fig. 1, besitzt dieses Integral daher keinen singulären Punkt rechts von der imaginären Achse. Teilen wir also  $H_-$  wiederum auf in  $H^1$  und  $H^2$ , so bestehen diese Teilintegrale lediglich aus den Integralen nach der positiven und negativen imaginären Achse, die ebenso wie vorher für  $r \rightarrow \infty$  verschwinden.

Wir kommen also zu dem einfachen Ergebnis: Im Limes  $r \rightarrow \infty$  wird, vgl. (8), (10) und (37):

$$(38) \quad w_+ = \frac{h^3}{8\pi^2\mu} (-\pi i) \sum_{l,m} A_{l,m}^+(\varepsilon_0) \psi_{l,m}^1(\varepsilon_0), \quad w_- = 0.$$

In der Tat fallen alle Glieder in (8), welche dem diskreten Spektrum entsprechen, für  $r \rightarrow \infty$  weg, weil die betreffenden Eigenfunktionen exponentiell verschwinden. Dasselbe gilt von der Eigenfunktion  $\psi_k$  des Anfangszustandes. Der Grenzzustand von  $u$ , Gl. (7), für  $r \rightarrow \infty$  wird also vollständig dargestellt durch das Produkt von (38) in den Faktor, vgl. (7):

$$\alpha e^{-i\omega t}, \quad \omega = \frac{2\pi}{h} (E_k + h\nu).$$

Dieser Zustand ist, vermöge der asymptotischen Darstellung (34) von  $\psi^1$ , eine ausstrahlende Kugelwelle. Die Intensität der Ausstrahlung ist zugleich die Intensität der Elektronenemission. Sie wird gegeben durch:

$$(39) \quad J = |u|^2 \sim \left| \sum_{l,m} A_{l,m}^+(\varepsilon_0) N_{l,m} C_l^* P_l^m(\cos \vartheta) \frac{\cos \vartheta}{\sin m\varphi} \right|^2.$$

Die von  $l$  und  $m$  unabhängigen Faktoren (z. B.  $\alpha$ ,  $1/r$  usw.) durften hier fortgelassen werden. Zeitfaktor und Exponentialfunktion in der asymptotischen Darstellung von  $\psi^1$  werden durch die Bildung des absoluten Betrages zerstört. Man be-

achte, daß in (34) die Exponentialfunktion und ihre Phase  $\alpha$  von  $l$  und  $m$  unabhängig sind. Die Abhängigkeit des Normierungsfaktors  $N$ , Gl. (35), und der Konstanten  $C^*$ , Gl. (29), von  $l$  und  $m$  ist durch die Indices angedeutet.

Es ist klar, daß wir statt der ausstrahlenden eine einstrahlende Welle gefunden hätten, wenn wir den Integrationsweg statt in der unteren, in der oberen Halbebene der Fig. 1 geführt hätten. Unsere Wahl des Integrationsweges (ausgezogener, nicht punktierter Weg der Fig. 1) ist also nachträglich gerechtfertigt.

#### § 4. Über die Einseitigkeit der Photoemission bei kurzwelligem Licht

Wir kommen jetzt zur Berechnung der Entwicklungskoeffizienten  $A$ . Nach (9) ist

$$(40) \quad A^+(\epsilon) = \int \left(1 + 2\pi i \frac{x}{\lambda}\right) \frac{\partial \psi_k}{\partial y} \psi^*(\epsilon) d\tau.$$

Hier haben wir bereits, wie in der Einleitung vorgesehen,  $\exp\left(2\pi i \frac{x}{\lambda}\right)$  entwickelt und mit dem zweiten Gliede abgebrochen. Dies entspricht der Annahme kurzwelligen Lichtes, während für optische Verhältnisse  $\lambda = \infty$  gesetzt werden kann. Die Polarkoordinaten  $r, \vartheta, \varphi$  werden (vgl. Einleitung) so definiert, daß

$$x = r \cos \vartheta, \quad y = r \sin \vartheta \cos \varphi, \quad z = r \sin \vartheta \sin \varphi.$$

Für  $\psi_k$  setzen wir die Wasserstoffeigenfunktion im Grundzustande ein, also:

$$(40a) \quad \begin{cases} \psi_k = C_k e^{-Zr/a}, & \frac{\partial \psi_k}{\partial y} = -\frac{Z}{a} \frac{y}{r} \psi_k \\ = C_1 \sin \vartheta \cos \varphi e^{-Zr/a}, & C_1 = -\frac{Z}{a} C_k. \end{cases}$$

Für  $\psi^*(\epsilon)$  schreiben wir mit den im § 2 erklärten Bezeichnungen

$$(40b) \quad \psi^*(\epsilon) = N_{lm} R_l P_l^m(\cos \vartheta) \frac{\cos m \varphi}{\sin m \varphi}.$$

$\psi$  ist hier die eigentliche, überall endliche Eigenfunktion (nicht die Teilfunktion  $\psi^1$ , mit der irrtümlicherweise in E § 4 gerechnet wurde).  $R$  ist daher reell, vgl. § 2 bei Gl. (32),

so daß  $\psi^* = \psi$  wird. Tragen wir alles in (40) ein und führen die Integration über  $d\mathbf{r}$  nach den einzelnen Koordinaten  $r$ ,  $\vartheta$ ,  $\varphi$  aus, so ergibt sich:

$$(41) \quad \begin{cases} A_{l,m}^+ = C_1 N_{l,m} \int_0^\infty r^2 dr e^{-Zr/a} R_l B_{l,m}, \\ B_{l,m} = \int_0^\pi \sin^2 \vartheta d\vartheta \left( 1 + 2\pi i \frac{r}{\lambda} \cos \vartheta \right) P_l^m(\cos \vartheta) \times \\ \int_0^{2\pi} \cos \varphi \frac{\cos}{\sin} m \varphi d\varphi. \end{cases}$$

Das letzte Integral zeigt unmittelbar, daß

$$(42) \quad m = 1 \quad \text{und} \quad \frac{\cos}{\sin} = \cos$$

zu nehmen ist, wenn anders  $A$  von Null verschieden sein soll. Beachten wir, daß nach der üblichen Definition der zugeordneten Kugelfunktionen gilt:

$$P_1^1 = \sin \vartheta, \quad P_2^1 = 3 \sin \vartheta \cos \vartheta,$$

so können wir für  $B_{l,m} = B_{l,1}$  schreiben:

$$B_{l,1} = \int_{-1}^{+1} P_1^1 P_l^1 du + \frac{2\pi i}{3} \frac{r}{\lambda} \int_{-1}^{+1} P_2^1 P_l^1 du.$$

Aus der Orthogonalitätsbedingung der Kugelfunktionen folgt also weiter, daß notwendig

$$(43) \quad l = 1 \text{ oder } l = 2$$

sein muß; andernfalls würde  $B$  und  $A$  verschwinden. Aus der bekannten Normierungsbedingung der  $P_l^m$  berechnet man sodann:

$$B_{11} = \frac{4}{3}, \quad B_{21} = \frac{8\pi i}{5} \frac{r}{\lambda}.$$

Die entsprechenden Werte von  $A$  sind:

$$A_{11}^+ = \frac{4}{3} C_1 N_{11} K_1, \quad A_{21}^+ = \frac{8\pi i}{5\lambda} C_1 N_{21} K_2,$$

mit den Abkürzungen:

$$(44) \quad K_1 = \int_0^\infty r^2 dr e^{-Zr/a} R_1, \quad K_2 = \int_0^\infty r^3 dr e^{-Zr/a} R_2.$$



Einsetzen in (39) liefert, wenn wir den Faktor des ersten Gliedes herausziehen und, was erlaubt ist, unterdrücken:

$$(45) \quad J \sim \left| 1 + \frac{9}{5} \left( \frac{N_{11}}{N_{11}} \right)^2 \frac{C_2^*}{C_1^*} \cdot \frac{2\pi i}{\lambda} \frac{K_2}{K_1} \cos \vartheta \right|^2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi.$$

Nun ist nach (35) ( $n$  ist rein imaginär):

$$\left( \frac{N_{11}}{N_{11}} \right)^2 = \frac{5}{9} \left| \frac{\Gamma(n+3)}{\Gamma(n+2)} \right| = \frac{5}{9} |n+2|^2 = \frac{5}{9} (4 + |n|^2)$$

und nach (29)

$$\frac{C_2}{C_1} = i \frac{\Gamma(n+2)}{\Gamma(n+3)} = \frac{i}{n+2}, \quad \frac{C_2^*}{C_1^*} = \frac{-i}{2-n}.$$

Der in (45) vorkommende Faktor  $| \cdot |^2$  lautet also

$$\left| 1 + \frac{4 + |n|^2}{2-n} \frac{2\pi}{\lambda} \frac{K_2}{K_1} \cos \vartheta \right|^2.$$

Das bedeutet bei konsequenter Vernachlässigung des Gliedes mit  $\lambda^{-2}$  ( $K_2/K_1$  ist reell):

$$(46) \quad 1 + \frac{8\pi}{\lambda} \frac{4 + |n|^2}{4 - n^2} \frac{K_2}{K_1} \cos \vartheta = 1 + \frac{8\pi}{\lambda} \frac{K_2}{K_1} \cos \vartheta.$$

(45) ist also in der Tat von der in der Einleitung angegebenen Form (3). Der dort eingeführte Koeffizient  $\gamma$  hat nach (46) die Bedeutung

$$(47) \quad \gamma = \frac{8\pi}{\lambda} \frac{K_2}{K_1}.$$

Man sieht auch, daß für langwelliges Licht ( $\lambda \rightarrow \infty$ )  $\gamma = 0$  wird und die Verteilungsfunktion (3) in (1) übergeht.

Wir haben jetzt nur noch den Ausdruck (47) zu diskutieren und zu dem Ende zunächst die Integrale  $K_1$  und  $K_2$  zu berechnen.

#### §. 5. Berechnung der Integrale $K_1$ und $K_2$ Diskussion der Voreilung

Die Integrale  $K_1$  und  $K_2$  sind in Gl. (44) definiert. Nach (32) haben wir

$$(i\rho)^2 R_1 = \frac{1}{2\pi} \int \left( \xi + \frac{1}{2} \right)^{n-2} \left( \xi - \frac{1}{2} \right)^{-n-2} e^{-e\xi} d\xi.$$

$$(i\rho)^3 R_2 = \frac{1}{2\pi} \int \left( \xi + \frac{1}{2} \right)^{n-3} \left( \xi - \frac{1}{2} \right)^{-n-3} e^{-e\xi} d\xi$$

und nach (17) und (18), wenn  $k$  weiterhin den durch Fig. 1 definierten Wert  $k_0$  bedeutet:

$$n = \frac{Z}{iak}, \quad \varrho = 2ikr.$$

In  $K_1$  und  $K_2$  vertauschen wir die Integrationen nach  $r$  und  $\xi$  und führen diejenige nach  $r$  aus. Beidemale kommt

$$(48) \quad \int_0^\infty e^{-\frac{Zr}{a} - 2ikr\xi} dr = \frac{1}{\frac{Z}{a} + 2ik\xi} = \frac{1}{2ik\left(\xi + \frac{n}{2}\right)}.$$

Somit

$$(49) \quad \begin{cases} (2k)^3 K_1 = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\left(\xi + \frac{1}{2}\right)^{n-2} \left(\xi - \frac{1}{2}\right)^{-n-2}}{\xi + \frac{n}{2}} d\xi, \\ -(2k)^4 K_2 = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\left(\xi + \frac{1}{2}\right)^{n-3} \left(\xi - \frac{1}{2}\right)^{-n-3}}{\xi + \frac{n}{2}} d\xi. \end{cases}$$

Die Integrationen sind wie in Fig. 3 um die beiden Verzweigungspunkte  $\xi = \pm \frac{1}{2}$  zu führen, unter Ausschluß des neu hinzugekommenen, in Fig. 3 eingezeichneten singulären Punktes  $\xi = -\frac{n}{2}$ . Letzteres folgt aus (48), weil hier die Integration nur dann einen Sinn hat, wenn für den ganzen Integrationsweg gilt ( $\xi = \xi_1 + i\xi_2$  gesetzt):

$$\frac{Z}{a} > 2k\xi_2, \text{ also } 2\xi_2 < |n|.$$

Die Integrationen in (49) lassen sich in Cauchyscher Weise ausführen. Die Integrale verschwinden im Unendlichen wie  $\xi^{-5}$  bzw. wie  $\xi^{-7}$ ; es bleiben also bei fortgesetzter Erweiterung des Integrationsweges nur die Residuen im Punkte  $\xi = -\frac{n}{2}$ .

Man erhält so

$$(49a) \quad \begin{cases} -(2k)^3 K_1 = \left(-\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right)^{n-2} \left(-\frac{n}{2} - \frac{1}{2}\right)^{-n-2}, \\ (2k)^4 K_2 = \left(-\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right)^{n-3} \left(-\frac{n}{2} - \frac{1}{2}\right)^{-n-3} \end{cases}$$

und hieraus, mit Rücksicht auf die Bedeutung von  $n$ :

$$\frac{K_2}{K_1} = \frac{2}{k} \frac{1}{1-n^2} = \frac{2k}{k^2 + \frac{Z^2}{a^2}}.$$

Der Ausdruck (47) lautet also nunmehr:

$$(50) \quad \gamma = \frac{16\pi}{\lambda} \frac{k}{k^2 + \frac{Z^2}{a^2}}.$$

Man zeigt leicht<sup>1)</sup>, daß vermöge der Definition von  $k$  (dem früheren  $k_0$ ) in Gl. (13) gilt

$$k^2 + \frac{Z^2}{a^2} = \frac{8\pi^2 \mu v}{h},$$

und kann daraufhin wegen

$$\lambda v = c \quad \text{und} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda v} = \frac{2\pi \mu v}{h}$$

( $\lambda_v$  die zur Geschwindigkeit  $v$  gehörende de Brogliesche Wellenlänge) statt (50) einfacher schreiben

$$(51) \quad \gamma = 4 \frac{v}{c}.$$

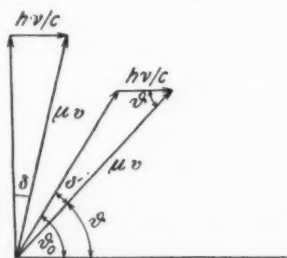
Dieser Wert ist angenähert *doppelt so groß* wie der Wert  $\gamma_0$ , den man (vgl. die Einleitung) klassisch nach der Vorstellung des Strahlungsdrucks bzw. des Lichtquantenimpulses erwarten sollte. Setzt man nämlich (vgl. Fig. 4), den Impuls der auffallenden Strahlung  $h\nu/c$  mit dem Impuls  $\mu v$  des Photoelektrons zusammen, so erhält man eine abgelenkte Richtung, die sich z. B. von der Vorzugsrichtung ( $y$ -Achse) unterscheidet um den kleinen Winkel

$$\delta = \frac{h\nu/c}{\mu v}.$$

Benutzt man im Zähler die Einsteinsche Gleichung, setzt also

$$h\nu = \frac{\mu}{2} v^2 + P$$

1) E, § 4, Gl. (26).



Elementare Auffassung der Vor-eilung bei Photoeffekt, Zusammensetzung des Elektronenimpulses  $\mu v$  mit dem Impuls des Lichtquants  $h\nu/c$ .

Fig. 4

so folgt

$$(52) \quad \delta = \frac{1}{2} \frac{v}{c} \cdot \left(1 + \frac{P}{L}\right),$$

wo  $L = \frac{\mu v^2}{2}$  die lebendige Kraft des emittierten Photoelektrons und  $P$  die fragliche Ionisierungsspannung, also in unserem Falle die  $K$ -Grenze bedeutet. Andererseits erhält man die Ablenkung  $\delta'$  für die beliebige Richtung  $\vartheta$  aus Fig. 4 durch Anwendung des Sinus-Satzes auf das schiefwinklige Dreieck zu

$$\delta' = \delta \sin \vartheta.$$

Nun ist die Zahl der Photoelektronen, die bei *Absehung vom Lichtdruck* unter einem Winkel gegen die Strahlrichtung zwischen  $\vartheta_0$  und  $\vartheta_0 + d\vartheta_0$ , also in ein ringförmiges Gebiet von der Winkelgröße  $2\pi \sin \vartheta_0 d\vartheta_0$  emittiert wird, nach (1)

$$(53) \quad dN \sim \pi \sin^2 \vartheta_0 \cdot \sin \vartheta_0 d\vartheta_0.$$

Dieselbe Teilchenzahl  $dN$  wird durch den Lichtdruck abgelenkt in den Winkelbereich  $(\vartheta, d\vartheta)$ , wobei (vgl. Fig. 4), gilt:

$$\vartheta_0 = \vartheta + \delta' = \vartheta + \delta \cdot \sin \vartheta,$$

$$d\vartheta_0 = (1 + \delta \cdot \cos \vartheta) d\vartheta,$$

$$\sin \vartheta_0 = \sin(\vartheta + \delta \cdot \sin \vartheta) = \sin \vartheta (1 + \delta \cdot \cos \vartheta).$$

Somit folgt aus (53) bei kleinem  $\delta$ :

$$\begin{aligned} dN &\sim \pi \sin^3 \vartheta (1 + \delta \cdot \cos \vartheta)^4 d\vartheta \\ &\sim \pi \sin^2 \vartheta (1 + 4\delta \cdot \cos \vartheta) \cdot \sin \vartheta d\vartheta. \end{aligned}$$

Dieselbe Teilchenzahl lautet, nach Gl. (3) berechnet, wobei wir statt dem wellenmechanischen  $\gamma$  das klassische  $\gamma_0$  zu schreiben haben<sup>1)</sup>:

$$dN \sim \pi \sin^2 \vartheta (1 + \gamma_0 \cos \vartheta) \cdot \sin \vartheta d\vartheta.$$

Also ist  $\gamma_0 = 4\delta$  und nach Gl. (52):

$$(54) \quad \gamma_0 = 2 \frac{v}{c} \left(1 + \frac{P}{L}\right).$$

1) Die vorstehende Rechnung ist eine Vereinfachung einer von E. J. Williams und Mitarbeitern gegebenen Betrachtung in Proc. R. Soc. 121. S. 129. 1928; vgl. insbesondere S. 613.

Für schnelle Photoelektronen ( $L \gg P$ ), d. h. für eine auffallende Strahlung, die hart ist gegen die *K*-Grenze des Atoms, haben wir, wie behauptet, approximativ:

$$\gamma_0 = 2 \frac{v}{c} = \frac{1}{2} \gamma.$$

Dieser Unterschied um den Faktor 2 zwischen der wellenmechanischen Berechnung und der klassischen Erwartung ist theoretisch ebenso bemerkenswert wie praktisch wichtig, vgl. die in der Einleitung genannten experimentellen Resultate.

Es möge angemerkt werden, daß die statistischen Messungen sich meist nicht auf die vollständige Verteilungsfunktion  $J$ , sondern vornehmlich auf den „Halbwertskegel“ beziehen, dessen Öffnung<sup>1)</sup> durch  $\gamma/4$ , also bei wellenmechanischer Rechnung direkt durch  $v/c$  gegeben wird. Daß die Voreilung eine reine Funktion von  $v/c$  ist, wo  $v$  die (mit Rücksicht auf die Ablösungsarbeit in der *K*-Schale zu berechnende) Elektronengeschwindigkeit bedeutet, wird durch die Beobachtungen vollkommen bestätigt, insbesondere durch neueste Messungen von P. Auger.<sup>2)</sup> Die elementar berechnete Voreilung  $\gamma_0$ , welche außer von  $v/c$  auch explizite von der Ablösungsarbeit  $P$  abhängt, wird also schon qualitativ durch diese Messungen widerlegt. Wegen der älteren Messungen wolle man Fig. 20 in E § 4 vergleichen, in der die betreffenden Öffnungen des Halbwertskegels aufgetragen sind, und zwar, wie wellenmechanisch notwendig, zur Abszisse  $v/c$ .

#### § 6. Gültigkeitsgrenzen der erhaltenen Resultate

Unsere Darstellung beschränkte sich auf das erste Korrektionsglied von  $\exp(2\pi i x/\lambda)$  in Gl. (40), setzte also eine „nicht zu kleine“ Wellenlänge, „eine nicht zu große“ Wellenzahl

$$q = \frac{2\pi}{\lambda}$$

voraus. Um die Bedeutung dieser Beschränkung zu diskutieren, schreiben wir (41) vollständig an, wobei wir die Integration nach  $q$  sogleich ausführen und unwesentliche Konstante fortlassen:

1) Vgl. z. B. E, § 4, Gl. (21).

2) P. Auger, *Compt. rend.* 188. S. 447. 1929.

$$(55) \quad A_l = N_{l1} \int_0^\infty r^2 dr e^{-Zr/a} R_l B_l,$$

$$(55a) \quad B_l = \int_{-1}^{+1} (1 - \xi^2) e^{iqr\xi} \frac{dP_l}{d\xi} d\xi, \quad \xi = \cos \vartheta.$$

Hier ist von der bekannten Darstellung der zugeordneten Kugelfunktion  $P_l^1$  Gebrauch gemacht:

$$P_l^1 = \sin \vartheta \frac{dP_l}{d \cos \vartheta}.$$

Durch partielle Integration folgt ( $qr = \varrho$  gesetzt) nach einfachen Umformungen:

$$(56) \quad B_l = \left\{ -i\varrho - i \frac{d^2}{d\varrho^2} \varrho \right\} \int e^{i\xi\xi} P_l(\xi) d\xi.$$

Zur Auswertung von (56) benutzen wir die Entwicklung<sup>1)</sup>

$$(57) \quad e^{i\xi\xi} = \sum_0^\infty (2n+1) i^n \psi_n(\varrho) P_n(\xi).$$

Die hier eingeführte Funktion

$$\psi_n(\varrho) = \sqrt{\frac{\pi}{2\varrho}} J_{n+1/2}(\varrho)$$

genügt der Differentialgleichung:

$$(57a) \quad \frac{d^2(\varrho\psi)}{d\varrho^2} = \left( \frac{n(n+1)}{\varrho^2} - 1 \right) \varrho\psi.$$

Aus (57) entnimmt man den Wert des in (56) vorkommenden Integrales, nämlich

$$\int e^{i\xi\xi} P_l d\xi = 2i^l \psi_l,$$

und erhält aus (57a):

$$B_l = 2i^{l-1} \frac{l(l+1)}{\varrho} \psi.$$

(55) geht daher über in

$$(57b) \quad A_l = \frac{2i^{l-1}}{\varrho} l(l+1) N_{l1} \int_0^\infty e^{-Zr/a} \psi_l(qr) R_l r dr.$$

1) Vgl. z. B. Riemann-Weber II. S. 492. 1927. Gl. (16).

Für  $R_l$  hatten wir in (32) eine Integraldarstellung gefunden, die  $r$  in der Form enthält:

$$\varrho^{-l-1} e^{-\varepsilon \xi}, \quad \varrho = 2ikr, \quad \text{Gl. (17).}$$

Bei dieser Darstellung wäre aber die Integrationsfolge ( $r \xi$ ) in (57 b) nicht umkehrbar wegen des Faktors  $r^{-l}$ . Jedoch können wir in (32)  $-l-1$  mit  $l$  vertauschen, da die definierende Differentialgleichung für  $R_l$  nur von  $l(l+1)$  abhängt. Dies liefert statt (32)

$$(32') \quad R_l = \frac{(i\varrho)^l}{2\pi} \int \left(\xi + \frac{1}{2}\right)^{n+l} \left(\xi - \frac{1}{2}\right)^{-n+l} e^{-\varepsilon \xi} d\xi.$$

Entsprechend, nämlich durch Vertauschung von  $l$  mit  $-l-1$ , ist auch der Normierungsfaktor  $N_{l,1}$  abzuändern.

Wir setzen (32') mit  $\varrho = 2ikr$  in (57) ein und erhalten das nunmehr konvergente Integral nach  $r$ :

$$(58) \quad \int_0^\infty e^{-x r} \psi_l(q r) r^{l+1} dr, \quad x = \frac{Z}{a} + 2ik\xi.$$

Sein Wert ist<sup>1)</sup>

$$\frac{(2\varrho)^l \Gamma(l+1)}{(q^2 + x^2)^{l+1}}.$$

Gl. (57 b) geht daraufhin über in

$$(59) \quad A_l = \frac{2l(l+1)!}{q} (-4ikq)^l N_{l,1} K.$$

$$(60) \quad K = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{(\xi + \frac{1}{2})^{n+l} (\xi - \frac{1}{2})^{-n+l}}{(q^2 + x^2)^{l+1}} d\xi.$$

Das letzte Integral läßt sich, da  $x$  linear in  $\xi$  ist, elementar ausführen, ähnlich wie wir die Integrale  $K_1, K_2$  in (49) ausgeführt haben, nämlich durch Residuenbildung in den beiden Polen  $x = \pm iq$ , d. h. nach (58)

$$\xi = \frac{-Z}{2ika} \pm \frac{q}{2k}.$$

Bei dieser Residuenbildung treten in (60) Potenzen der Ausdrücke

$$\frac{1}{2} \left( \frac{iZ}{ka} + 1 \pm \frac{q}{k} \right) \quad \text{und} \quad \frac{1}{2} \left( \frac{iZ}{ka} - 1 \pm \frac{q}{k} \right)$$

1) Vgl. z. B. G. N. Watson, Theory of Bessel Functions, Cambridge 1922, S. 386, Gl. (5).

auf. Die frühere Berechnung der  $K$ , insbesondere in den Gl. (49 a) kam darauf hinaus, daß wir in diesen Ausdrücken  $q/k$  vernachlässigten. Unsere früheren Resultate sind also an die Voraussetzung gebunden:

$$\frac{q}{k} \ll \left| \frac{iZ}{ka} \pm 1 \right|,$$

d. h.

$$(61) \quad q^2 \ll \frac{Z^2}{a^2} + k^2.$$

Die rechte Seite ist (vgl. S. 427) gleich  $\frac{8\pi^2\mu\nu}{h}$ , die linke Seite gleich  $\frac{4\pi^2\nu^2}{c^2}$ . Wir können daher die Bedingung (61) auch schreiben:

$$(61a) \quad h\nu \ll 2\mu c^2.$$

Da die kinetische Energie  $\frac{1}{2}\mu v^2$  der Photoelektronen kleiner ist als  $h\nu$ , enthält diese Voraussetzung auch, daß  $v$  nicht mit  $c$  vergleichbar werden darf. In der Tat haben wir im Vorstehenden nirgends die sonst erforderlichen Relativitätskorrekturen vorgenommen.

Nachdem wir in (59) einen allgemeinen Ausdruck für  $A$ , gefunden haben, könnten wir versuchen, auch, die Verteilungsfunktion  $J$  Gl. (39), in geschlossener Form zu berechnen.<sup>1)</sup> Indessen erweisen sich hierfür unsere Polarkoordinaten als ungeeignet. Aus einer brieflichen Mitteilung von Hrn. Wentzel erfahren wir, daß die vollständige Berechnung von  $J$  inzwischen in der Züricher Dissertation von Hrn. J. Fischer mit parabolischen Koordinaten durchgeführt ist. Unsere Verteilungsfunktion (3) einschließlich des Verteilungsfaktors (50) ergibt sich dabei unter der Bedingung (61) als zweite Näherung des vollständigen Ausdrucks von  $J$ .

1) Eine Arbeit von A. Carelli, Ztschr. f. Phys. 56. S. 694. 1929, welche dasselbe Ziel hat, lehnt sich zu enge an E § 4 an und unterliegt daher den in der Einleitung genannten Einwänden.

(Eingegangen 25. Dezember 1929)



## **Zur Richtungsverteilung der Photoelektronen der L-Schale**

**Von G. Schur**

Im folgenden soll im Anschluß an die vorhergehende Arbeit<sup>1)</sup> die Richtungsverteilung der Photoelektronen der L-Schale behandelt werden. Bei nichtrelativistischer Rechnung kann man nur die  $L_I$ -Elektronen von den  $L_{II}$ - und  $L_{III}$ -Elektronen zusammen unterscheiden. Es ergibt sich für die letzteren auch bei Vernachlässigung der Voreilung nicht mehr das  $\cos^2 \lambda$ -Gesetz<sup>2)</sup> ( $\lambda$  bezeichne den Winkel der Emissionsrichtung mit der Richtung des elektrischen Feldes der linear polarisiert vorausgesetzten Strahlung), sondern die Verteilung hat die Form  $a \cos^2 \lambda + b$ . Diese Form wurde schon von P. Auger und F. Perrin<sup>3)</sup> in ihrer auf einigen Symmetrievoraussetzungen beruhenden Theorie des Photoeffekts allgemein abgeleitet; für die Emission von K-Elektronen erhalten die Autoren aus spezielleren Betrachtungen  $b = 0$ , während das Verhältnis  $b/a$  im allgemeinen unbestimmt bleibt; sie erwarten für die höheren Schalen, besonders bei Anregung wenig oberhalb der Ionisierungsspannung, einen erheblichen „isotropen Beitrag“  $b$ . Auf wellenmechanischer Grundlage hat, wie ich aus einer kürzlich erschienenen experimentellen Arbeit von E. C. Watson und J. A. van den Akker<sup>4)</sup> entnehme,

1) A. Sommerfeld u. G. Schur, Über den Photoeffekt in der K-Schale usw., weiterhin mit A zitiert; es werden die Bezeichnungen und Formeln dieser Arbeit benutzt.

2) Das Winkelverteilungsgesetz soll stets die relative Emissionshäufigkeit pro Einheit des räumlichen Winkels angeben.

3) P. Auger u. F. Perrin, Journ. de Physique, Série VI, 8. S. 93. 1927.

4) E. C. Watson u. J. A. van den Akker, Proc. Roy. Soc. 126. S. 142. 1929; die Überlegungen von Oppenheimer sind bisher nicht publiziert.

J. R. Oppenheimer bereits im Winter 1928 dieses Gesetz für  $L_{II}$ - und  $L_{III}$ -Elektronen erhalten und die Größenordnung des Verhältnisses  $b/a$  zu  $2/3$  abgeschätzt. G. Wentzel<sup>1)</sup> erhielt wellenmechanisch für beliebige Elektronentypen das  $\cos^2 \lambda$ -Gesetz; das Resultat galt aber streng nur für Typen mit der azimuthalen Quantenzahl  $l = 0$ , während für  $l > 0$  näherungsweise die Eigenfunktionen des kontinuierlichen Spektrums durch ihre asymptotische Form für großen Abstand vom Kern ersetzt wurden: das scheint aber auch dann nicht gerechtfertigt zu sein, wenn man, wie Wentzel es tut, eine gegenüber der Ablösungsarbeit große kinetische Energie des Photoelektrons voraussetzt.

Die Wellenfunktion, die zu einem Ausgangszustand mit dem Eigenwert  $E^0$  und der zeitunabhängigen Wellenfunktion  $\psi^0$  bei Störung durch ein Vektorpotential

$$\mathcal{A}_y = A \cos 2\pi \left( \nu t - \frac{x}{\lambda} \right)$$

gehört, ist nach A (7) und (38) in großem Abstand  $r$  vom Atom:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Psi = \delta \sum_{l,m} A_{l,m} \psi_{l,m}^1 \quad \delta = -\frac{A e \hbar}{4 \mu c} \\ A_{l,m} = \int e^{2\pi i \frac{x}{\lambda}} \frac{\partial \psi^0}{\partial y} \psi_{l,m}^* d\tau. \end{array} \right.$$

Für die  $\psi_{l,m}$  kann irgendein vollständiges orthogonales und in der Energieskala normiertes System von Eigenfunktionen zum Eigenwert  $\hbar \nu + E^0$  gewählt werden; wir benutzen Polarkoordinaten. Die  $\psi_{l,m}^1$  sind die zugehörigen, einer ausgehenden Welle entsprechenden Teilfunktionen (vgl. A, § 2). Gehört der Ausgangszustand zu einer Azimutalquantenzahl  $l_0 > 0$ , so besteht eine Unbestimmtheit in der Wahl von  $\psi^0$ . Denkt man sich diese durch ein schwaches Magnetfeld aufgehoben, so sieht man, daß man für das diesem Feld angepaßte System von  $2l_0 + 1$  Ausgangsfunktionen  $\psi_\mu^0$  die zugehörigen  $\Psi_\mu$  zu berechnen und die Dichten  $\Psi_\mu \Psi_\mu^*$  über  $\mu$  zu mitteln hat:  $J = \frac{1}{2l_0 + 1} \sum \Psi_\mu \Psi_\mu^*$ . Geht man von diesem System  $\psi_\mu^0$  zu irgendeinem anderen von  $2l_0 + 1$  orthogonalen

1) G. Wentzel, Ztschr. für Physik 40. S. 574. 1927; Physikalische Ztschr. 29. S. 321. 1928.

Ausgangsfunktionen durch eine orthogonale Transformation über, so erleiden die  $\Psi_\mu$  wegen der Linearität des Problems dieselbe Transformation und  $\sum \Psi_\mu \Psi_\mu^*$  bleibt ungeändert.  $J$  hängt also von keiner Vorzugsrichtung des Ausgangssystems ab, sondern nur vermittelt der Koeffizienten  $A_{l,m}$  von der Strahlrichtung und der des elektrischen Feldes. Daher erfüllt die Winkelverteilung  $J(\vartheta, \varphi)$  offenbar die erste der Auger-Perrinschen Symmetrieforderungen<sup>1)</sup>:

$$J(\vartheta, \varphi) = J(\vartheta, -\varphi) = J(\vartheta, \pi + \varphi) = J(\vartheta, \pi - \varphi).$$

Man überzeugt sich leicht, daß sie auch der zweiten Forderung<sup>2)</sup> genügt:

$$J(\vartheta, \varphi) + J\left(\vartheta, \varphi + \frac{\pi}{n}\right) + J\left(\vartheta, \varphi + \frac{2\pi}{n}\right) + \dots \\ + J\left(\vartheta, \varphi + \frac{(n-1)\pi}{n}\right) \quad n \equiv 2$$

soll nur noch von  $\vartheta$  abhängen.

Das beruht darauf, daß die einem Vektorpotential  $\mathfrak{A} = (\mathfrak{A}_x, \mathfrak{A}_y, \mathfrak{A}_z)$  und einem Ausgangszustand  $\psi^0$  zugeordnete gestörte Eigenfunktion  $\Psi = (\Psi_x, \Psi_y, \Psi_z)$  Vektorcharakter hat. Man kann daher das allgemeine Ergebnis der Auger-Perrinschen Betrachtungen auf die wellenmechanische Rechnung anwenden und für beliebige Typen  $J(\vartheta, \varphi) = a(\vartheta) \cos^2 \varphi + b(\vartheta)$  erwarten.

Wir gehen nun zur Auswertung der Entwicklungskoeffizienten

$$A_{l,m}^0 = \int \frac{\partial \psi^0}{\partial y} \left(1 + 2\pi i \frac{x}{\lambda}\right) \psi_{l,m}^* d\tau$$

über, wobei wie in A, § 4  $e^{2\pi i x/\lambda}$  bis zum zweiten Glied entwickelt ist. Für  $\psi^0$  haben wir zu setzen:

$$(2) \quad L_1: V = C' \left(\frac{2a}{Z} - r\right) e^{-\frac{Zr}{2a}}, \quad C' = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \left(\frac{Z}{a}\right)^{5/2}.$$

$$L_{II} \text{ und } L_{III}: \begin{cases} X = C' e^{-\frac{Zr}{2a}} r \cos \vartheta, \\ Y = C' e^{-\frac{Zr}{2a}} r \sin \vartheta \cos \varphi, \\ Z = C' e^{-\frac{Zr}{2a}} r \sin \vartheta \sin \varphi. \end{cases}$$

1) a. a. O., S. 94; bezüglich der Festlegung der Polarkoordinaten vgl. A, Einleitung.

2) a. a. O., S. 97.

Wir bezeichnen die zu diesen Funktionen gehörigen Koeffizienten mit  $A_{l,m}$ ,  $B_{l,m}$ ,  $C_{l,m}$ ,  $D_{l,m}$ , die nach (1) gebildeten Wellenfunktionen mit  $\psi_1$ ,  $\psi_2$ ,  $\psi_3$ ,  $\psi_4$ .

Für  $\psi_{l,m}$  haben wir nach A (32), (35), (40b) zu setzen:

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \psi_{l,m} &= N_{l,m} P_l^m(\cos \vartheta) \frac{\cos m \varphi}{\sin m \varphi} \frac{(-2kr)^{-l-1}}{2\pi} \cdot \\ &\quad \int \left( \xi + \frac{1}{2} \right)^{n-l-1} \left( \xi - \frac{1}{2} \right)^{-n-l-1} e^{2ikr\xi} d\xi \\ N_{l,m} &= \sqrt{\epsilon_m \frac{(2l+1)(l-m)!}{(l+m)!} \frac{2\mu k}{h^2} e^{\frac{\pi Z}{2ak}}} \left| \Gamma(n+l+1) \right|, \\ \epsilon_0 &= 1, \quad \epsilon_m = 2, \quad m > 0. \end{aligned} \right.$$

Der Integrationsweg in dem Integral über  $\xi$  ist ein geschlossener Weg um  $\xi = -\frac{1}{2}$  und  $\xi = +\frac{1}{2}$ .  $\psi_{l,m}$  ist reell. Die Koeffizienten  $A_{l,m}$ ,  $B_{l,m}$ , ..., die zu  $\cos m \varphi$  bzw.  $\sin m \varphi$  gehören, sollen durch Indices  $c$  und  $s$  unterschieden werden.

Wir zerlegen  $\frac{\partial \psi^0}{\partial y} \left( 1 + 2\pi i \frac{x}{\lambda} \right)$  nach den Kugelfunktionen

$$P_l^m(\cos \vartheta) \frac{\cos m \varphi}{\sin m \varphi}:$$

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial y} \left( 1 + 2\pi i \frac{x}{\lambda} \right) &= C' e^{-\frac{Zr}{2a}} \left( \frac{rZ}{2a} - 2 \right) \left\{ P_1^1(\cos \vartheta) \cos \varphi \right. \\ &\quad \left. + \frac{2\pi i}{\lambda} r \frac{P_2^1(\cos \vartheta) \cos \varphi}{3} \right\}, \\ \frac{\partial X}{\partial y} \left( 1 + 2\pi i \frac{x}{\lambda} \right) &= -C' \frac{Z}{2a} e^{-\frac{Zr}{2a}} r \left\{ \frac{P_2^1(\cos \vartheta)}{3} \cos \varphi \right. \\ &\quad \left. + \frac{2\pi i}{\lambda} r \frac{2}{15} P_3^1(\cos \vartheta) \cos \varphi + \frac{2\pi i}{\lambda} r \frac{1}{5} P_1^1(\cos \vartheta) \cos \varphi \right\}, \\ \frac{\partial Y}{\partial y} \left( 1 + 2\pi i \frac{x}{\lambda} \right) &= -C' \frac{Z}{2a} e^{-\frac{Zr}{2a}} \left\{ \left( \frac{r}{3} - \frac{2a}{Z} \right) P_0^0(\cos \vartheta) \right. \\ &\quad - \frac{r}{3} P_2^0(\cos \vartheta) + \frac{r}{6} P_2^2(\cos \vartheta) \cos 2\varphi \\ &\quad + \frac{2\pi i}{\lambda} \left( -r \frac{2a}{Z} P_1^0(\cos \vartheta) + r^2 \frac{P_1^0(\cos \vartheta)}{5} \right. \\ &\quad \left. \left. + r^2 \frac{P_2^2(\cos \vartheta) \cos 2\varphi}{30} - r^2 \frac{P_2^0(\cos \vartheta)}{5} \right) \right\}, \\ \frac{\partial Z}{\partial y} \left( 1 + 2\pi i \frac{x}{\lambda} \right) &= -C' \frac{Z}{2a} e^{-\frac{Zr}{2a}} \left\{ r \frac{P_2^2(\cos \vartheta)}{6} \sin 2\varphi \right. \\ &\quad \left. + \frac{2\pi i}{\lambda} r^2 \frac{P_2^2(\cos \vartheta)}{30} \sin 2\varphi \right\}. \end{aligned} \right.$$

Bei der Ausführung der Integration über  $\vartheta$  und  $\varphi$  treten die Integrale

$$Q_{l,m}^2 = \iint \left[ P_l^m(\cos \vartheta) \right]^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \frac{\cos^2 m \varphi}{\sin^2 m \varphi} = \frac{4\pi}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{1}{2m} \text{ auf.}$$

Die Integrale über  $r$  sind von der Form:

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} K_l(\nu) &= \frac{(-2kr)^{-l-1}}{2\pi} \int_0^\infty e^{-\frac{Zr}{2a}} r^l \frac{1}{r^{l+1}} \int \left( \xi + \frac{1}{2} \right)^{n-l-1} \\ &\quad \left( \xi - \frac{1}{2} \right)^{-n-l-1} e^{-2ikr\xi} d\xi r^2 dr. \end{aligned} \right.$$

Indem wir aus dem von  $\psi_{l,m}$  herrührenden Normierungsfaktor  $N_{l,m}$  den Bestandteil  $1/Q_{l,m}$  herausnehmen, können wir schreiben:

$$(6) \quad N_{l,m} Q_{l,m}^2 = Q_{l,m} F_l, \quad F_l = \sqrt{\frac{8\pi\mu k}{h^2}} e^{\frac{\pi Z}{2ak}} \left| \Gamma(n+l+1) \right|.$$

Wir erhalten dann für die Koeffizienten, die nicht bei der Integration über die Winkel verschwinden:

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} A_{1,1}^c &= C' Q_{1,1} F_1 \left( \frac{Z}{2a} K_1(1) - 2K_1(0) \right) \\ A_{2,1}^c &= C' Q_{2,1} F_2 \left( \frac{2\pi i}{\lambda} \right) \left( \frac{Z}{2a} \frac{K_2(2)}{3} - 2 \frac{K_2(1)}{3} \right) \\ B_{1,1}^c &= -C' \frac{Z}{2a} Q_{1,1} F_1 \frac{2\pi i}{\lambda} \frac{1}{5} K_1(2) \\ B_{2,1}^c &= -C' \frac{Z}{2a} Q_{2,1} F_2 \frac{1}{3} K_2(1) \\ B_{3,1}^c &= -C' \frac{Z}{2a} Q_{3,1} F_3 \frac{2\pi i}{\lambda} \frac{2}{15} K_3(2) \\ C_{0,0} &= -C' \frac{Z}{2a} Q_{0,0} F_0 \left( \frac{1}{3} K_0(1) - \frac{2a}{Z} K_0(0) \right) \\ C_{1,0} &= -C' \frac{Z}{2a} Q_{1,0} F_1 \frac{2\pi i}{\lambda} \left( -\frac{2a}{Z} K_1(1) + \frac{1}{5} K_1(2) \right) \\ C_{2,0} &= -C' \frac{Z}{2a} Q_{2,0} F_2 \left( -\frac{1}{3} \right) K_2(1) \\ C_{2,2}^c &= -C' \frac{Z}{2a} Q_{2,2} F_2 \frac{1}{6} K_2(1) \\ C_{3,0} &= -C' \frac{Z}{2a} Q_{3,0} F_3 \left( -\frac{2\pi i}{\lambda} \right) \frac{1}{5} K_3(2) \end{aligned} \right.$$

$$C_{3,2}^e = -C' \frac{Z}{2a} Q_{3,2} F_3 \left( \frac{2\pi i}{\lambda} \right) \frac{1}{30} K_3(2)$$

$$D_{2,2}^e = -C' \frac{Z}{2a} Q_{2,2} F_2 \frac{1}{6} K_2(1)$$

$$D_{3,2}^e = -C' \frac{Z}{2a} Q_{3,2} F_3 \frac{2\pi i}{\lambda} \frac{1}{30} K_3(2).$$

Wir können in  $K_l(\nu)$  für  $\nu + 2 \geq l + 1$  die Integration nach  $r$  zuerst ausführen und erhalten:

$$(8) K_l(\nu) = \frac{(-2k)^{-l-1}}{2\pi} \int \frac{\left(\xi + \frac{1}{2}\right)^{n-l-1} \left(\xi - \frac{1}{2}\right)^{-n-l-1} (\nu+1-l)!}{\left(\frac{Z}{2a} + 2ik\xi\right)^{\nu+2-l}} d\xi.$$

Das Integral läßt sich auf den Umlauf um den Pol

$$\xi = -\frac{Z}{4iak} = -\frac{n}{4}$$

zusammenziehen und gibt:

$$(9) K_l(\nu) = \frac{(-i)^{l-2}}{(2ik)^{\nu+3}} \frac{d^{\nu+1-l}}{d\xi^{\nu+1-l}} \left(\xi + \frac{1}{2}\right)^{n-l-1} \left(\xi - \frac{1}{2}\right)^{-n-l-1} \Big|_{\xi = -\frac{n}{4}}.$$

Wir brauchen folgende dieser  $K_l(\nu)$ :

$$(10) \left\{ \begin{array}{l} K_0(0) = \frac{-1}{(2ik)^3} \left(-\frac{n}{4} + \frac{1}{2}\right)^{n-2} \left(-\frac{n}{4} - \frac{1}{2}\right)^{-n-2} \left(-\frac{1}{2}n\right) \\ K_0(1) = \frac{-1}{(2ik)^4} \left(-\frac{n}{4} + \frac{1}{2}\right)^{n-2} \left(-\frac{n}{4} - \frac{1}{2}\right)^{-n-2} (-2) \\ K_1(0) = \frac{i}{(2ik)^3} \left(-\frac{n}{4} + \frac{1}{2}\right)^{n-2} \left(-\frac{n}{4} - \frac{1}{2}\right)^{-n-2} \\ K_1(1) = 0. \\ K_1(2) = \frac{i}{(2ik)^5} \left(-\frac{n}{4} + \frac{1}{2}\right)^{n-3} \left(-\frac{n}{4} + \frac{1}{2}\right)^{-n-3} (-4) \\ K_2(1) = \frac{1}{(2ik)^4} \left(-\frac{n}{4} + \frac{1}{2}\right)^{n-3} \left(-\frac{n}{4} - \frac{1}{2}\right)^{-n-3} \\ K_2(2) = \frac{1}{(2ik)^5} \left(-\frac{n}{4} + \frac{1}{2}\right)^{n-4} \left(-\frac{n}{4} - \frac{1}{2}\right)^{-n-4} \left(\frac{1}{2}n\right) \\ K_3(2) = \frac{-i}{(2ik)^5} \left(-\frac{n}{4} + \frac{1}{2}\right)^{n-4} \left(-\frac{n}{4} - \frac{1}{2}\right)^{-n-4}. \end{array} \right.$$

Die den vier Ausgangszuständen entsprechenden Wellenfunktionen der Photoelektronen sind nach A (34), (29) für große  $r$

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} \psi_1 &= \delta \frac{e^{-i(kr+a)}}{r} \sum_{l,m} A_{l,m} N_{l,m} C_l^* P_l^m(\cos \vartheta) \frac{\cos m \varphi}{\sin m \varphi} \\ C_l^* &= \frac{e^{-\frac{\pi}{2} \frac{Z}{ak} - i \frac{\pi}{2} (l-1)}}{k \Gamma(-n+l+1)}, \text{ entsprechend } \psi_2, \psi_3, \psi_4. \end{aligned} \right.$$

Wir können aus den  $A_{l,m}$  die Faktoren  $C' Q_{l,m} F_l$  herausnehmen und mit  $N_{l,m} C_l^*$  zusammenfassen. Es ist

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} C' Q_{l,m} F_l N_{l,m} C_l^* &= C' F_l^2 C_l^* \\ &= C' \frac{8\pi \mu k}{h^2} e^{\frac{\pi Z}{ak}} |\Gamma(n+l+1)|^2 \frac{1}{k} \frac{e^{-\frac{\pi}{2} \frac{Z}{ak} - i \frac{\pi}{2} (l-1)}}{\Gamma(-n+l+1)} \\ &= F \cdot \Gamma(n+l+1) (-i)^l, \quad F = C' \frac{8\pi \mu i}{h^2} e^{\frac{\pi Z}{2ak}}. \end{aligned} \right.$$

Wir erhalten dann

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} \psi_1 &= \delta F \frac{e^{-i(kr+a)}}{r} \left[ -2K_1(0) \Gamma(n+2) (-i) P_1^1(\cos \vartheta) \cos \varphi \right. \\ &\quad \left. + \frac{2\pi i}{\lambda} \left\{ \frac{Z}{2a} \frac{K_2(2)}{3} - \frac{2K_2(1)}{3} \right\} \Gamma(n+3) (-i)^2 P_2^1(\cos \vartheta) \right. \\ &\quad \left. \cdot \cos \varphi \right], \\ \psi_2 &= \delta F \frac{e^{-i(kr+a)}}{r} \left( -\frac{Z}{2a} \right) \left[ \frac{1}{3} K_2(1) \Gamma(n+3) (-i)^2 P_2^1(\cos \vartheta) \cos \varphi \right. \\ &\quad \left. + \frac{2\pi i}{\lambda} \left\{ \frac{K_1(2)}{5} \Gamma(n+2) (-i) P_1^1(\cos \vartheta) \cos \varphi \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{2}{15} K_3(2) \Gamma(n+4) (-i)^3 P_3^1(\cos \vartheta) \cos \varphi \right\} \right], \\ \psi_3 &= \delta F \frac{e^{-i(kr+a)}}{r} \left( -\frac{Z}{2a} \right) \left[ \left( \frac{1}{3} K_0(1) - \frac{2a}{Z} K_0(0) \right) \Gamma(n+1) P_0^0(\cos \vartheta) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{3} K_2(1) \Gamma(n+3) (-i)^2 P_2^0(\cos \vartheta) + \frac{1}{6} K_2(1) \Gamma(n+3) (-i)^2 \right. \\ &\quad \left. \cdot P_2^2(\cos \vartheta) \cos 2\varphi \right. \\ &\quad \left. + \frac{2\pi i}{\lambda} \left\{ \frac{1}{5} K_1(2) \Gamma(n+2) (-i) P_1^0(\cos \vartheta) - \frac{1}{5} K_3(2) \Gamma(n+4) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \cdot (-i)^3 P_3^0(\cos \vartheta) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{30} K_3(2) \Gamma(n+4) (-i)^3 P_3^2(\cos \vartheta) \cos 2\varphi \right\} \right], \\ \psi_4 &= \delta F \frac{e^{-i(kr+a)}}{r} \left( -\frac{Z}{2a} \right) \left[ \frac{1}{6} K_2(1) \Gamma(n+3) (-i)^2 P_2^2(\cos \vartheta) \sin 2\varphi \right. \\ &\quad \left. + \frac{2\pi i}{\lambda} \frac{1}{30} K_3(2) \Gamma(n+4) (-i)^3 P_3^2(\cos \vartheta) \sin 2\varphi \right]. \end{aligned} \right.$$

Es ist schließlich  $\psi_1 \psi_1^*$  und  $\psi_2 \psi_2^* + \psi_3 \psi_3^* + \psi_4 \psi_4^*$  zu berechnen, wobei wir Glieder mit  $1/\lambda^2$  vernachlässigen. Ziehen wir in  $\psi_1$  den Faktor  $K_1(0) \Gamma(n+2)$ , in  $\psi_2, \psi_3, \psi_4$  den Faktor  $K_2(1) \Gamma(n+3)$  heraus, so treten folgende Quotienten auf:

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{K_2(2) \Gamma(n+3)}{K_1(0) \Gamma(n+2)} &= \frac{2in(n+2)}{k^2 \left(1 - \frac{n^2}{4}\right)^2}, \\ \frac{K_2(1) \Gamma(n+3)}{K_1(0) \Gamma(n+2)} &= \frac{2n+4}{k \left(1 - \frac{n^2}{4}\right)}, \\ \frac{K_1(2) \Gamma(n+2)}{K_2(1) \Gamma(n+3)} &= \frac{\frac{n}{2} - 1}{k \left(1 - \frac{n^2}{4}\right)}, \\ \frac{K_2(2) \Gamma(n+4)}{K_1(1) \Gamma(n+3)} &= \frac{2(n+3)}{k \left(1 - \frac{n^2}{4}\right)}, \\ \frac{K_0(1) \Gamma(n+1)}{K_2(1) \Gamma(n+3)} &= \frac{3n-2-n^2}{8(1-n^2)}, \\ \frac{K_0(0) \Gamma(n+1)}{K_1(1) \Gamma(n+3)} &= \frac{ikn}{16} \frac{(3n-2-n^2)}{1-n^2}. \end{aligned} \right.$$

Man erhält:

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} \psi_1 \psi_1^* &= \frac{\delta^2 F F^*}{r^2} | \Gamma(n+2) |^2 K_1(0)^2 4 \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi \\ &\quad \cdot \left( 1 + \frac{16\pi \cos \vartheta}{\lambda k \left(1 - \frac{n^2}{4}\right)} \left( 1 + \frac{n^2}{4 \left(1 - \frac{n^2}{4}\right)} \right) \right), \\ \psi_2 \psi_2^* + \psi_3 \psi_3^* + \psi_4 \psi_4^* &= \frac{\delta^2 F F^*}{r^2} \frac{Z^2}{4a^3} \frac{| \Gamma(n+3) |^2 K_2(1)^2}{1-n^2} \\ &\quad \cdot \left\{ \frac{1}{4} - \frac{n^2}{16} - \frac{n^2}{2} \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi + \frac{4\pi}{\lambda k} \cos \vartheta \right. \\ &\quad \cdot \left. \left\{ \frac{4-12n^2}{4-n^2} \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi + \frac{1}{2} \right\} \right\}. \end{aligned} \right.$$

Die Emission  $J$  einer vollständigen  $L$ -Schale erhalten wir, wenn wir diese Ausdrücke addieren und verdoppeln:



$$(16) \left\{ \begin{aligned} J &= 2 \frac{\partial^3 F F^*}{r^3} |\Gamma(n+2)|^2 K_1(0)^2 4 \\ &\cdot \left\{ \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi \left( 1 + \frac{16\pi}{\lambda k} \frac{\cos \vartheta}{1 - \frac{n^2}{4}} \left( 1 + \frac{n^2}{4 \left( 1 - \frac{n^2}{4} \right)} \right) \right) \right. \\ &- \frac{n^2}{4(1-n^2)} \left[ 1 - \frac{2n^2}{1 - \frac{n^2}{4}} \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi + \frac{16\pi}{\lambda k} \frac{\cos \vartheta}{1 - \frac{n^2}{4}} \right. \\ &\cdot \left. \left. \left( \frac{1}{2} + \frac{1-3n^2}{1 - \frac{n^2}{4}} \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi \right) \right] \right\}. \end{aligned} \right.$$

Die Bedeutung der Konstanten  $-n^2 = \frac{Z^2}{a^2 k^2}$  ergibt sich folgendermaßen: Der Eigenwert, zu dem die Eigenfunktionen  $V, X, Y, Z$  gehören, ist  $E_0 - \frac{Z^2 e^2}{8a}$ . Machen wir  $\frac{Z^2 e^2}{8a}$  durch passende Wahl einer abgeschirmten Kernladung  $Z$  gleich  $I_L$ , wo  $I_L$  ein Mittelwert der Ionisierungsarbeiten der L-Schale ist, so finden wir  $-n^2 = \frac{4I_L}{h\nu - I_L}$  und  $\frac{4\pi}{\lambda k} \frac{1}{1 - \frac{n^2}{4}} = \frac{v}{c}$ ;  $v$  ist

die Geschwindigkeit der Photoelektronen. Setzen wir das in die obige Formel ein, so erhalten wir für die Winkelverteilung der Photoelektronen schließlich:

$$(17) \left\{ \begin{aligned} J(\vartheta, \varphi) &\sim \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi + \frac{4v}{c} \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi \cos \vartheta \left( 1 - \frac{I_L}{h\nu} \right) \\ &+ \frac{I_L}{h\nu + 3I_L} \left\{ 1 + \frac{8I_L}{h\nu} \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi + \frac{2v}{c} \cos \vartheta \right. \\ &\cdot \left. \left( 1 + 2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi \left( 1 + \frac{11I_L}{h\nu} \right) \right) \right\}. \end{aligned} \right.$$

Die erste Zeile dieses Ausdrucks, die sich auf die  $L_I$ -Elektronen bezieht, ist, wie es sein muß, der Verteilung der K-Elektronen ähnlich, nur ist die Voreilung um den Faktor  $\left(1 - \frac{I_L}{h\nu}\right)$  kleiner. In dem zweiten Teil der Formel, der den  $L_{II} + L_{III}$ -Elektronen entspricht, stellt das letzte Glied offenbar die Voreilung dar; die beiden ersten haben die in der Einleitung besprochene Form  $a + b \cos^2 \lambda$ . Es ist unerwartet, daß das winkelabhängige Glied mit  $b$  bei wachsender Frequenz

gegen das isotrope Glied  $a$  zurücktritt. Bei kleinem  $I_L$  könnte es, ohne daß die Voreilungsglieder ins Gewicht fallen, nach der Formel ein Gebiet für  $h\nu$  von fast völliger Isotropie geben.

Die Existenz eines isotropen Bestandteils wird sowohl durch die experimentellen Ergebnisse von Auger<sup>1)</sup>, wie von Watson, a. a. O., bestätigt. Quantitativ werden aber die Augerschen Resultate durch unsere Formel nicht wiedergegeben; die berechnete Isotropie würde unter den Bedingungen seiner Versuche nicht merklich sein.

Durch Integration über alle Richtungen  $\vartheta, \varphi$  kann man aus unserer Formel die Gesamtzahl der von der  $L_I$ - und der von der  $L_{II} + L_{III}$ -Schale emittierten Elektronen berechnen. Man erhält ersichtlich für das Verhältnis beider:

$$\frac{L_{II} + L_{III}}{L_I} = \frac{I_L}{h\nu + 3I_L} \left( 3 + 8 \frac{I_L}{h\nu} \right).$$

Im Falle hinreichend großer  $h\nu$  erhält man hieraus:

$$\frac{3I_L}{h\nu} \dots h\nu \gg I_L.$$

Dies stimmt qualitativ mit Wentzel<sup>2)</sup> überein, weicht aber im Zahlenfaktor von dem bei Wentzel geschätzten Werte ab. Andererseits gibt unsere Formel für die Umgebung der  $L$ -Kante:

$$\frac{11}{4} \dots h\nu = I_L.$$

Wir nähern uns hier also dem Verhältnis der Besetzungszahlen dieser Schalen, welches bekanntlich 6:2 ist.<sup>3)</sup>

Für die Anregung zu dieser Arbeit und wertvolle Ratschläge bei der Ausführung bin ich Hrn. Prof. A. Sommerfeld zu großem Dank verpflichtet.

1) P. Auger, *Compt. rend.* 188. S. 447 und 1287. 1929.

2) G. Wentzel, *Ztschr. f. Phys.* 40. Gl. 20. S. 574. 1926.

3) Dies stimmt im wesentlichen überein mit dem Ergebnis von J. R. Oppenheimer, *Ztschr. f. Phys.* 41. 1927, insbes. S. 287.

(Eingegangen 25. Dezember 1929)

## **Über die nichtstationäre Behandlung des Photoeffekts**

**Von H. Bethe**

Die Anwendung der Diracschen Methode der Variation der Konstanten auf den Photoeffekt ermöglicht eine vollständige raumzeitliche Beschreibung des Vorgangs der Elektronenemission; man erhält dabei, ebenso wie bei der stationären Behandlung, *nur eine auslaufende und keine einlaufende Elektronenwelle.*

Bekanntlich besteht eine gewisse Diskrepanz zwischen den Resultaten der „stationären“ und der „nichtstationären“ Behandlung zeitabhängiger Störungen in der Wellenmechanik. Bei der stationären Behandlung z. B. des Photoeffekts<sup>1)</sup> oder Comptoneffekts<sup>2)</sup> bleibt stets noch eine gewisse Willkür in der Wahl eines Integrationswegs, die gestattet, das Verhalten der gestörten Eigenfunktionen im Unendlichen (auslaufende Wellen) vorzuschreiben; bei der nichtstationären Methode von Dirac ist dagegen die Wellenfunktion zu jeder beliebigen Zeit eindeutig bestimmt, wenn man sie für einen gewissen Zeitpunkt  $t = 0$  festgelegt hat; man hat keinerlei freie Wahl mehr und erhält mit Notwendigkeit scheinbar sowohl eine auslaufende wie eine einlaufende Elektronenwelle, wobei der physikalische Sinn der letzteren vollkommen unklar bleibt.

Es ist das Ziel dieser Notiz, zu zeigen, daß sich bei der nichtstationären Behandlung des Photoeffektes in Wirklichkeit doch nur ein auslaufendes Wellenpaket ergibt, während sich die einlaufenden Wellen durch Interferenz vernichten. Beim Comptoneffekt und ähnlichen Problemen wäre die Überlegung ganz analog.

---

1) A. Sommerfeld u. G. Schur, dieses Heft S. 409. Im folgenden mit A. zitiert.

2) Z. B. G. Wentzel, Ztschr. f. Phys. 43, S. 1 u. 779. 1927.

Wir betrachten der Einfachheit halber ein Atom mit nur einem Elektron und der Kernladung  $Z$ , auf das zur Zeit  $t = 0$  eine elektromagnetische Welle mit dem Vektorpotential

$$(1) \quad \mathfrak{A} = \mathfrak{A}_y = A \cos 2\pi \nu \left( t - \frac{x}{c} \right), \quad A = \frac{Ec}{2\pi \nu}$$

auffallen möge. Die zeitabhängige Wellenfunktion des Atoms entwickeln wir, wie üblich, nach Eigenfunktionen des ungestörten Problems:

$$(2) \quad u = \sum_m a_m u_m + \int_0^\infty dW a_W u_W,$$

wobei wir davon absehen, daß eigentlich zur gleichen Energie  $W$  (bzw.  $W_m$ ) noch verschiedene Eigenfunktionen gehören, die sich durch ihre Winkelabhängigkeit unterscheiden. Zur Zeit  $t = 0$  soll sich das Atom im Zustand  $n$  (z. B. Grundzustand) befinden:

$$(3) \quad a_n = 1 \quad a_m = 0 \quad (m \neq n) \quad a_W = 0 \quad \text{für } t = 0.$$

Dann ergibt die Diracsche Theorie der Variation der Konstanten<sup>1)</sup>

$$(4) \quad \begin{cases} a_W = C \cdot A \frac{e}{W} \frac{e^{-\frac{2\pi i}{h}(W_n - W + h\nu)t} - 1}{W_n - W + h\nu} \\ + C A \frac{e}{W} \frac{e^{-\frac{2\pi i}{h}(W_n - W - h\nu)t} - 1}{W_n - W - h\nu}, \end{cases}$$

wobei

$$(5) \quad C = \frac{h}{2\pi} \frac{e}{mc} \frac{A}{2} = \frac{ehE}{8\pi^2 m \nu}$$

eine kleine Konstante ist und das Matricelement

$$(6) \quad A \frac{e}{W} = \int e^{\pm \frac{2\pi i \nu}{c} x} \bar{\psi}_W \frac{\partial \psi_n}{\partial y} d\tau$$

(Übergangswahrscheinlichkeit) dieselbe Bedeutung hat wie in „A“. Für  $a_m$  ergibt sich ein zu (4) völlig analoger Ausdruck.

Uns interessiert das Verhalten der Wellenfunktion  $u$  in großer Entfernung vom Atom. Hier sind die diskreten Eigen-

1) Vgl. z. B. G. Wentzel, Phys. Ztschr. 29. S. 330. 1928.

funktionen  $u_m$  zu vernachlässigen und für die kontinuierlichen kann man ihren asymptotischen Wert<sup>1)</sup> einsetzen:

$$(7) \quad u_W = e^{-\frac{2\pi i}{h}(W + m_0 c^2)t} \cdot \frac{\cos(kr + \gamma \lg kr)}{r} \cdot N(W)$$

mit

$$(8) \quad k = \frac{2\pi}{h} \sqrt{2mW} \quad \gamma = \frac{2\pi}{h} e^2 Z \sqrt{\frac{m}{2W}}.$$

$N$  ist der Normierungsfaktor, vgl. A § 2, Ende.

Tragen wir (4) und (7) in (2) ein, so wird

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} u &= C \int dW N(W) A_W^+ (e^{i(kr + \gamma \lg kr)} + e^{-i(kr + \gamma \lg kr)}) \cdot \frac{1}{2r} \\ &\cdot \frac{e^{-\frac{2\pi i}{h}(W_n + h\nu)t} - e^{-\frac{2\pi i}{h}Wt}}{W_n + h\nu - W} \cdot e^{-\frac{2\pi i}{h}m_0 c^2 t}. \end{aligned} \right.$$

Hier haben wir den zweiten Summanden von (4) als unwesentlich fortgelassen, weil sein Nenner für keine Energie  $W$  des kontinuierlichen Spektrums verschwindet. In (9) entwickeln wir die im Exponenten stehende, von  $W$  stark abhängige Größe  $k$  in der Umgebung der Resonanzstelle

$$W_0 = W_n + h\nu:$$

$$(10) \quad k = k_0 + \left(\frac{dk}{dW}\right)_0 (W - W_0) + \dots, \quad \left(\frac{dk}{dW}\right)_0 = \frac{2\pi}{h} \sqrt{\frac{m}{2W_0}} = \frac{2\pi}{h v_0},$$

wobei  $v_0$  die zur kinetischen Energie  $W_0$  gehörige Elektronengeschwindigkeit ist. Den Normierungsfaktor  $N(W)$ , die „Übergangsamplitude“  $A_W$  sowie das Glied  $\gamma \lg kr$  im Exponenten können wir bei großem  $r$  und  $t$  als langsam veränderliche Funktionen von  $W$  (gegenüber den rasch veränderlichen Exponentialfunktionen  $e^{ikr}$  und  $e^{-\frac{2\pi i}{h}Wt}$ , vgl. aber unten) betrachten und durch ihren Wert an der Resonanzstelle  $W_0$  ersetzen. Dann wird:

$$(11) \quad u = \frac{C}{2r} N(W_0) A^+(W_0) e^{-\frac{2\pi i}{h}(m_0 c^2 + W_0)t} \cdot (I + II).$$

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} I &= e^{i(k_0 r + \gamma_0 \lg k_0 r)} \cdot \int dW \frac{e^{i\left(\left(\frac{dk}{dW}\right)_0 r - \frac{2\pi}{h}t\right)(W - W_0)} - e^{i\left(\frac{dk}{dW}\right)_0 r (W - W_0)}}{W - W_0} \\ II &= e^{-i(k_0 r + \gamma_0 \lg k_0 r)} \cdot \int dW \frac{e^{i\left(-\left(\frac{dk}{dW}\right)_0 r - \frac{2\pi}{h}t\right)(W - W_0)} - e^{i\left(-\left(\frac{dk}{dW}\right)_0 r\right)(W - W_0)}}{W - W_0} \end{aligned} \right.$$

1) Vgl. „A“.

Wir haben in I und II Integrale auszuführen vom Typ

$$(13) \quad J = \int_0^{\infty} \frac{e^{i\alpha(W-W_0)} - e^{i\beta(W-W_0)}}{W - W_0} dW,$$

wobei

$$\text{in I: } \begin{cases} \alpha = \left(\frac{dk}{dW}\right)_0 r - \frac{2\pi}{h} t \\ \beta = \left(\frac{dk}{dW}\right)_0 r \end{cases} \quad \text{in II: } \begin{cases} \alpha = -\left(\frac{dk}{dW}\right)_0 r - \frac{2\pi}{h} t \\ \beta = -\left(\frac{dk}{dW}\right)_0 r \end{cases}.$$

Der Integrand in (13) ist bei  $W = W_0$  regulär, wir können daher, ohne etwas zu ändern, den eigentlich längs der reellen Achse zu nehmenden Integrationsweg in der  $W$ -Ebene z. B. etwas in die negative Halbebene ausbiegen, so daß wir den ausgezogenen Weg der Fig. 1 in der Arbeit A erhalten, der den Punkt  $W = W_0$  umgeht.<sup>1)</sup> Längs dieses abgeänderten Weges verhält sich nun auch jeder der beiden *Summanden*

$$\frac{e^{i\alpha(W-W_0)}}{W - W_0} \quad \text{und} \quad \frac{e^{i\beta(W-W_0)}}{W - W_0}$$

regulär, so daß wir diese einzeln betrachten dürfen. Wir können dann den Integrationsweg (vgl. A, Fig. 1) in das Unendliche der positiven oder negativen Halbebene ziehen, je nachdem ob  $\alpha$  (bzw.  $\beta$ ) positiv oder negativ ist. Im ersten Fall erhält man außer dem Integral längs der imaginären Achse, das bei großem  $\alpha$  mit  $1/\alpha$  gegen Null strebt, einen (positiven) Umlauf um den Pol bei  $W_0$ , im zweiten Fall nur das Integral längs der imaginären Achse. Also wird bis auf Größen von der Ordnung  $1/\alpha$  bzw.  $1/\beta$ :

$$J = \begin{cases} 0, & \text{wenn } \alpha \text{ und } \beta \text{ gleiches Vorzeichen haben,} \\ + 2\pi i, & \text{wenn } \alpha > 0 > \beta, \\ - 2\pi i, & \text{wenn } \alpha < 0 < \beta. \end{cases}$$

Wir haben also die Vorzeichen von  $\alpha$  und  $\beta$  zu untersuchen. Im Integral II ist, da  $\left(\frac{dk}{dW}\right)_0 > 0$ , sicher stets sowohl

1) In unserem Fall würden wir natürlich genau dasselbe erhalten, wenn wir in die positive Halbebene ausbiegen würden (gestrichelter Weg der Fig. 1); es liegt also im Gegensatz zu A hier in dem Ausbiegen keine Willkür.

$\alpha$  wie  $\beta$  negativ. Also fällt die dem Integral II entsprechende einlaufende Welle stets fort. In I ist stets  $\beta > 0$ , während

$$\alpha > 0, \quad \text{wenn } r > \frac{2\pi}{h} \left( \frac{dW}{dk} \right)_0 t = v_0 t = r_0,$$

$$\alpha < 0, \quad \text{wenn } r < r_0 = v_0 t.$$

Nur im zweiten Fall ist I endlich, und wir erhalten demnach, indem wir noch  $C$  aus (5) eintragen:

$$(14) \quad \begin{cases} u = -i \frac{A h e}{4 m c} \cdot \frac{1}{r} \cdot N(W_0) A_{W_0}^+ e^{-\frac{2\pi i}{h} (W_0 + m_0 c^2) t + i(k_0 r + \gamma_0 \lg k_0 r)} & \text{für } r < v_0 t \\ u = 0 & \text{für } r > v_0 t. \end{cases}$$

$r_0 = v_0 t$  ist aber gerade diejenige Entfernung vom Atomkern, bis zu der ein bei Beginn der Bestrahlung emittiertes Elektron vermöge seiner korpuskularen Geschwindigkeit  $v_0$  gelangt wäre. Man erhält also folgendes, vollkommen einleuchtende Resultat: *In dem Gebiet, das nach der korpuskularen Auffassung von Photoelektronen bereits erreicht sein kann, ist die Wellenfunktion endlich, entspricht einer auslaufenden Welle und ergibt eine zeitunabhängige und mit  $1/r^2$  proportionale Ladungsdichte; außerhalb der Grenzkugel mit dem Radius  $v_0 t$  befinden sich keine Photoelektronen.* Die Gesamtzahl der bis zur Zeit  $t$  emittierten Photoelektronen

$$\int |u|^2 d\tau$$

ergibt sich, wie es sein muß, proportional  $t$ .

Natürlich ist dies Resultat nur eine erste Näherung. Hätten wir die Veränderlichkeit von  $\gamma \lg k r$  mit  $W$  [vgl. (9)] berücksichtigt, so hätten wir auf genau die gleiche Weise ebenfalls das Verschwinden der einlaufenden Welle konstatiert, jedoch einen etwas anderen Radius  $r_0$  der Grenzkugel erhalten, innerhalb welcher die Elektronendichte von Null verschieden ist, es wäre nämlich:

$$\left( \frac{dk}{dW} \right)_0 r_0 + \left( \frac{d\gamma}{dW} \right)_0 \lg k_0 r + \frac{\gamma_0}{k_0} \left( \frac{dk}{dW} \right)_0 = \frac{2\pi}{h} t$$

oder auch mit Einführen des Wertes von  $\gamma$  aus (8):

$$\frac{r_0}{v_0} - \frac{h}{4\pi W_0} \sqrt{\frac{J}{W_0}} \left( \lg \frac{4\pi W_0}{h} \frac{r_0}{v_0} - 1 \right) = t$$

( $J$  = Ionisierungsspannung).

Die Kugelschale  $r_0$ , bis zu der die Photoelektronen nach der Zeit  $t$  gekommen sind, liegt also etwas weiter vom Atomkern entfernt als  $v_0 t$ . Auch dies ist korpuskular verständlich, denn die Geschwindigkeit des Elektrons ist in der Nähe des Kerns *größer* als diejenige in großer Entfernung vom Kern ( $v_0$ ).

Ferner muß noch berücksichtigt werden, daß in der Nähe der Grenzkugel  $\alpha$  nahezu 0 wird, infolgedessen darf hier einerseits das längs der imaginären Achse genommene

$$\int \frac{e^{i\alpha(W-W_0)}}{W-W_0} dW$$

nicht vernachlässigt werden, andererseits dürfen auch Normierungsfaktor  $N(W)$  und Übergangswahrscheinlichkeit  $A_W^+$  nicht mehr als „langsam veränderlich“ gegenüber  $e^{i\alpha(W-W_0)}$  betrachtet werden. Man erhält unter Berücksichtigung dieser Umstände keine scharfe Grenze zwischen dem Gebiet mit endlicher Elektronendichte (proportional  $1/r^2$ ) und demjenigen verschwindender Elektronendichte, sondern ein kontinuierliches Übergangsgebiet mit „Vorläufern“ des eigentlichen Photostroms an Stellen, wo nach korpuskularer Auffassung noch keine Elektronen hingekommen sein könnten.

Sehen wir von diesen Verfeinerungen ab, so bleibt als wichtiges Resultat, daß bei der Methode der Variation der Konstanten automatisch die physikalisch sinnlose einlaufende Welle verschwindet, wodurch die Verbindung mit der stationären Behandlungsweise in „A“ hergestellt ist. Die Methode von Dirac ermöglicht eine vollkommene raumzeitliche Beschreibung des Vorgangs, weil sie von vornherein nicht mit einer vollkommen monochromatischen Wellfunktion<sup>1)</sup> arbeitet

---

1) Wenn auch nach monochromatischen *Eigenfunktionen* entwickelt wird.



wie die stationäre. Nach der letzteren hat Wentzel<sup>1)</sup> zum Zwecke der raumzeitlichen Verfolgung des Vorgangs eine Überlagerung von Wellen verschiedener Frequenz dadurch erhalten, daß er aus physikalischen Gesichtspunkten heraus eine Dämpfung des Anfangszustandes einführte; bei uns ist ein solcher Umweg nicht notwendig.<sup>2)</sup>

---

1) G. Wentzel, Ztschr. f. Phys. **40**. S. 574. 1926. § 5. Das dortige Resultat ist mit unserem identisch.

2) Diese Feststellung steht im Gegensatz zu der Bemerkung von G. Wentzel, Ztschr. f. Phys. **58**. S. 364, daß auch nach der Dirac'schen Methode zur räumlichen Beschreibung noch eine besondere Einführung abgebrochener Wellenzüge erforderlich sei.

(Eingegangen 25. Dezember 1929)

## **Über das ultraviolette Absorptionsspektrum des Chlorophylls**

**Von D. van Gulik**

(Mit 1 Figur)

Das Absorptionsspektrum des Chlorophylls im ultravioletten Spektralteil ist von Dhéré und de Rogowski<sup>1)</sup> untersucht worden nach der photographischen Methode, und von Elsa Lewkowitsch<sup>2)</sup> mittels eines Quarzspektrographen.

Auf die Nachteile der photographischen Methode für Absorptionsspektren hat Weigert<sup>3)</sup> hingewiesen. Lewkowitsch benutzt als Strahlungsquelle das Linienspektrum von Induktionsfunken und kommt zu einer Absorptionskurve, welche an kritischen Stellen noch Lücken zeigt.

Es schien mir deshalb erwünscht, noch einmal mit einem kontinuierlichen Spektrum diese Untersuchung zu wiederholen. Die Strahlungsquelle war eine von Philips in Eindhoven gelieferte Wolframlampe in einem zylindrischen Quarzglasballon, dessen Glühkörper, ein Wolframbändchen von 2 mm Breite, bei 15,5 Amp. zu hellem Leuchten gebracht wurde.

Das Quarzspektrometer bestand aus demselben Quarzprisma, das früher von mir für die Untersuchung des ultraroten Absorptionsspektrum des Chlorophylls benutzt wurde, und worüber ich in diesen Annalen berichtet habe<sup>4)</sup>. Das Prisma war aber jetzt zwischen zwei Quarzlinsen fest aufgestellt in der Minimumstellung für die Natriumlinie. In den Brennebenen dieser beiden Linsen befanden sich bzw. das Spaltstück und ein Vakuum-Thermoelement mit Quarzfenster

1) C. Dhéré und de Rogowski, *Comp. rend.* **155**, II S. 653. 1912.

2) E. Lewkowitsch, *Bioch. Journ.* **22**, S. 777. 1928.

3) F. Weigert, *Ber. d. Deutsch. Chem. Ges.* **49**, I S. 1496. 1916.

4) *Ann. d. Phys.* **46**, S. 147. 1915.

von Kipp in Delft. Das Thermoelement war nur 0,1 mm dick und erzeugte die Spannung von 1 Mikrovolt für  $5 \cdot 10^{-8}$  Kal. Sek.

Weil die Linsen nicht achromatisch waren, mußte die Verschiebung des Thermoelementes durch das Spektrum bei weitem nicht senkrecht zur Strahlenrichtung vor sich gehen. Die richtige Bildfläche des Spektrums wurde aufgesucht mittels einer photographischen Platte, welche alle sichtbaren und ultra-

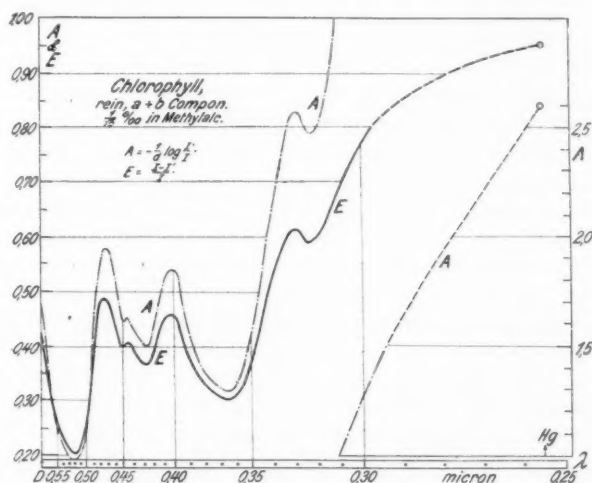


Fig. 1

violetten Spektrallinien einer Quecksilberquarzlampe scharf abbildete. Das in dieser Weise erhaltene Linienspektrum diente zugleich für die Eichung der Skale in Wellenlängen.

Das Spiegelgalvanometer nach Zernike<sup>1)</sup> gab einen Ausschlag von 1 mm für  $2 \cdot 10^{-9}$  Volt; Skalenabstand 1000 mm.

Die Doppelkuvette aus Quarz war 5 mm weit. Das Chlorophyll war Rein-Chlorophyll, nämlich die *a*- und *b*-Komponenten zusammen; das Lösungsmittel Methyl- oder Äthylalkohol.

Die Figur zeigt das Resultat einer  $1/15$  Promillelösung, und

1) F. Zernike, Kon. Ac. Amsterdam, Dl 30. Nr. 4.

zwar das Absorptionsverhältnis  $E = \frac{J - J^1}{J}$ , sowie die Absorptionskonstante

$$A = -\frac{1}{d} \log \frac{J^1}{J} \text{ cm}^{-1}.$$

Es bedeutet  $J^1$  bzw.  $J$  die Intensität der Strahlen nach ihrem Durchgang durch die Lösung, bzw. durch das Lösungsmittel allein, während  $d$  die Schichtdicke der Flüssigkeit ist, welche bei meinen Versuchen 0,5 cm betrug.

Für Wellenlängen kleiner als  $0,3 \mu$  sind die Kurven gestrichelt, denn hier war die Strahlungsintensität so weit herabgesunken, daß eine Korrektur für „falsches Licht“ notwendig war, welche die Resultate immer mehr unsicher machte. Ein glücklicher Umstand war aber hierbei, daß der Endpunkt der Kurve wieder mit hinreichender Genauigkeit zu bestimmen war, indem ich hier schließlich die Quecksilberquarzlampe als Strahlungsquelle benutzte, und zwar die starke Linie von  $0,254 \mu$ . Auch war hier die Intensität des falschen Lichtes leicht zu messen, indem das Thermoelement nunmehr so weit verschoben wurde, bis es die Quecksilberlinie eben passiert hatte.

Die Kurven zeigen, daß der übliche Name „Endabsorption“ für die Absorption im blauen und violetten Spektralteil nicht zutrifft. Es folgen ja noch im sichtbaren Teil zwei Minima, und weiter im Ultraviolett noch ein tiefes Minimum, bevor eine wirkliche Endabsorption eintritt, jenseits  $0,35 \mu$ , also in dem Gebiete der ultravioletten Strahlung, welche heutzutage auch in anderen Kreisen der Wissenschaft die Aufmerksamkeit auf sich gezogen hat. Und es wäre interessant zu wissen, ob diese Endabsorption im Pflanzenleben beiträgt zur Assimilation<sup>1)</sup> oder ob sie vielleicht dazu dient, die tieferen Zellen gegen eine schädliche Einwirkung<sup>2)</sup> dieser Strahlen zu schützen, in ähnlicher Weise, wie man glaubt, daß das braune Pigment in der menschlichen Haut wirksam sein soll.

Wageningen, Landwirtschaftliche Hochschule.

1) Vgl. Ursprung in Ber. d. D. Bot. Ges. 36. S. 83. 1918.

2) Ebenda S. 97.

(Eingegangen 9. Januar 1930)

**Statistische Schwankungen  
der quantenhaften Absorption  
von Röntgenstrahlen<sup>1)</sup>**

**Von H.-J. Cohn-Peters und Fritz Lange**

(Mit 4 Figuren)

Das Ziel der vorliegenden Arbeit war, eine Methode zu entwickeln, um kleine Intensitätsänderungen von Röntgenstrahlen nachzuweisen, mit dem weiteren Zweck, die Röntgenabsorption verschiedener Medien genauestens zu untersuchen. Um vom konstanten Arbeiten des Rohrs unabhängig zu sein, wurde von Anfang an mit einer Differentialschaltung gearbeitet, bei der Intensitätsschwankungen und weitgehend auch Härteschwankungen des Rohrs eliminiert sind. Zum Nachweis der Strahlung wurden dabei Ionisationskammern verwendet. Bei den ersten Versuchen dieser Art fielen zwei getrennt ausgeblendete Strahlenbündel eines Röntgenrohrs in zwei nebeneinander angeordnete Ionisationskammern, deren Innenelektroden verbunden zu einem Nullinstrument führten, und deren Außenelektroden auf entgegengesetztes Potential geladen waren. Die durch Strahlung in beiden Kammern entstandenen Ionisationsströme waren also von entgegengesetzter Richtung und konnten durch geeignetes Verändern der variierbaren Kammervolumina gleich gemacht werden, so daß das Nullinstrument keinen Ausschlag zeigte. Das erste Ziel der Arbeit bestand natürlich darin, eine solche hochempfindliche Anordnung von Störungen verschiedenster Art zu befreien. Dazu war erforderlich 1. alle mit dem als Nullinstrument verwendeten Quadrantenelektrometer leitend verbundenen Teile nicht nur in üblicher Weise elektrostatisch zu schützen, sondern auch von der umgebenden Luft abzuschließen, 2. alle Hochspannung führenden Leitungen gegen Spitzensprühungen zu schützen. Durch diese

---

1) Auszug aus einer Berliner Dissertation.

beiden Maßnahmen konnte verhindert werden, daß die von der Hochspannung durch Sprühung ausgehenden Ionen Aufladungen bewirkten, die zur Folge hatten, daß das Quadrantenelektrometer allmählich sich steigernde unregelmäßige Schwankungen machte, die auch noch längere Zeit anhielten, wenn die Hochspannung schon abgeschaltet war. Nachdem diese Störungen beseitigt waren, konnte man sich den dann noch verbleibenden feineren Störungen zuwenden und nach deren Ursprung suchen, um sie ebenfalls ausschalten zu können. Hierbei wurde als Nullinstrument ein Fadenelektrometer verwendet. Als weitere Störungsquellen kamen dann noch folgende in Frage: 1. Brennfleckverlagerung im Röntgenrohr. Hierdurch würden Richtungsänderungen der beiden ausgeblendeten Strahlenbündel hervorgerufen, die dann in beiden Kammern verschiedene Wirkung ausüben könnten, so daß das Gleichgewicht dann gestört würde. 2. Spannungsschwankungen am Röntgenrohr. Diese bedingen Härteschwankungen der Strahlung, die dann in beiden Kammern infolge nicht genau gleicher Filterung Intensitätsschwankungen hervorrufen würden.

Die erste Störung wurde dadurch vermieden, daß beide Ionisationskammern *hintereinander* angeordnet wurden, wobei also beide Kammern von demselben Strahlenbündel getroffen wurden. Aber diese Hintereinander-Anordnung bedingt notwendigerweise eine kleine Verschiedenheit in der Filterung beider Strahlungen, und demnach, je nach dem Grad der Monochromatisierung, eine verschiedene Härte der Strahlungen in beiden Kammern, die die erwähnten Störungen bei Spannungsschwankungen begünstigen. Es wurde zunächst versucht, diese dadurch auszuschalten, daß der Transformator nicht mit dem stark schwankenden Wechselstrom des städtischen Netzes betrieben wurde, sondern daß die Energie einer äußerst konstanten Akkumulatorenbatterie entnommen wurde, deren Strom mittels eines rotierenden Umformers in sinusförmigen Wechselstrom verwandelt wurde. Diese Maßnahme erwies sich aber noch nicht als ausreichend, sondern es war außerdem erforderlich, die Strahlung noch weitgehend zu monochromatisieren. Hierdurch konnten die genannten Störungen so weit beseitigt werden, daß dann nur Schwankungen wesentlich feinerer Art übrigblieben, die sich, wie im weiteren Verlauf der Arbeit gezeigt wird, als *statistische* Schwankungen der quantenhaften

Absorption der Röntgenstrahlen erwiesen. Diese „Störungen“ sind natürlich prinzipiell nicht mehr zu beseitigen. Ihr verschleiender Einfluß bei der Feststellung kleiner Intensitätsänderungen zwischen beiden Kammern läßt sich aber weitgehend dadurch herabsetzen, daß mit möglichst großen absoluten Intensitäten gearbeitet wird. Bei der in dieser Arbeit benutzten Intensität, die begrenzt war durch die erforderliche weitgehende Filterung, die Dimensionierung der Kammern und die Leistung des Röntgenrohrs, waren Intensitätsänderungen zwischen beiden Kammern von  $\frac{1}{1000}$  Proz. dann gerade noch erkennbar.

Angewandt wurde dieses Verfahren zur Messung sehr kleiner Intensitätsänderungen zunächst auf die Intensitätsänderungen der statistischen Schwankungen der Absorption der Strahlung selbst, um diese als statistische zu identifizieren.

#### Allgemeines über statistische Schwankungen

*Der Absorptionsvorgang von Röntgenstrahlen.* Wenn ein Röntgenquant absorbiert wird, geht seine Energie, falls einmal Comptonprozesse außer acht gelassen werden können, plötzlich praktisch vollkommen in kinetische Energie eines Photoelektrons über, das seinerseits seine Energie zum großen Teil dadurch verliert, daß es auf seinem Weg die Atome des betreffenden Mediums durch Stoß ionisiert. Die Anzahl der Ionen, die es erzeugen kann, hängt von der Energie des Quants ab. Das Photoelektron eines absorbierten Quants einer Röntgenstrahlung von der Wellenlänge  $\lambda = 0,3 \text{ \AA}$  (Anregungsspannung etwa 40 kV) vermag in Luft etwa 1000 Atome zu ionisieren, wozu bei Atmosphärendruck ein Luftweg von etwa 2,8 cm nötig ist. Bei einem gewöhnlichen Ionisationsstrom von  $10^{-8}$  Amp. wandern etwa  $6,3 \cdot 10^{10}$  Ionen pro Sekunde, die bei einer Röntgenstrahlung von  $\lambda = 0,3 \text{ \AA}$  durch die Absorption von  $6,3 \cdot 10^6$  Quanten pro Sekunde verursacht werden. Setzt man voraus, daß die einzelnen Absorptionsakte voneinander unabhängige Ereignisse sind, so stellt diese Anzahl pro Sekunde absorbierter Quanten nur einen Mittelwert dar, um den die Anzahl der tatsächlich absorbierten Quanten zeitliche Schwankungen macht.

*Historisches.* Statistische Schwankungen ähnlicher Art sind in der Radioaktivität bekannt als „Schweidlersche Schwan-

kungen“. Im Gegensatz zu den *Absorptions*schwankungen dieser Arbeit handelt es sich dabei um „*Emissions*schwankungen“, die sich aus der Diskontinuität des radioaktiven Umwandlungsprozesses ergeben. Schon bei diesen statistischen Schwankungen hat man daran gedacht, zur bequemen Sichtbarmachung eine empfindliche Kompensationsmethode zu verwenden. Mit einer Differentialschaltung zweier Ionisationskammern hat zuerst K. W. F. Kohlrausch<sup>1)</sup> Schweidlersche Schwankungen beobachtet. Meyer und Regener<sup>2)</sup> dagegen verwendeten zur Kompensation des mittleren Ionisationsstroms einen Ohmschen Widerstand (Bronson). Diese ersten Arbeiten gaben zwar noch keine gute zahlenmäßige Übereinstimmung mit den theoretisch erwarteten Schwankungen. Der Grund hierfür war vor allen Dingen der, daß bei der experimentellen Prüfung der Fall der statistischen Schwankung in Reinheit gar nicht vorlag, sondern zunächst durch gewisse systematische Störungen entstellt war. Diese ergaben sich erstens aus der Trägheit des Elektrometers, zweitens aus dem Abfließen der Schwankungsaufladung, das verschiedenen Anlaß haben konnte. Bei der Meyer-Regenerschen Kompensationsmethode kam ein solches Abfließen vorwiegend durch den verwendeten Bronson zustande, der hierbei nicht im Bereich der Sättigung, sondern in seinem Ohmschen Bereich verwendet wurde. Bei der Differentialmethode von Kohlrausch dagegen floß die Ladung durch unvollkommene Sättigung der Ionisationskammern ab. Die beobachteten Störungen wirken sich bei beiden Methoden so aus, daß bei größeren Beobachtungszeiten die beobachteten Schwankungen in ihrer Größe hinter den theoretisch erwarteten zurückbleiben. Sie nähern sich nach unendlicher Zeit einem Grenzwert, während die reine Schwankungstheorie mit wachsender Zeit unbegrenzt weiter wachsende Schwankungen fordert. Diese experimentellen Störungen sind von Campbell<sup>3)</sup> und ganz allgemein von Schrödinger<sup>4)</sup> eingehend theoretisch behandelt worden und konnten durch Versuche von E. Bormann<sup>5)</sup> gut bestätigt werden. Erwähnt werden diese Arbeiten deshalb

1) K. W. F. Kohlrausch, Wiener Ber. **115**. S. 673. 1906.

2) E. Meyer und E. Regener, Ann. d. Phys. **25**. S. 757. 1908.

3) N. Campbell, Physikal. Ztschr. **11**. S. 826. 1910.

4) E. Schrödinger, Wiener Ber. **127**. S. 237. 1918 und **128**. S. 177. 1919.

5) E. Bormann, Wiener Ber. **127**. S. 2347. 1918.



weil diese Probleme auch bei uns auftraten und berücksichtigt werden mußten. In letzter Zeit hat Wasastjerna<sup>1)</sup> in Helsingfors bei Röntgenstrahlen statistische Schwankungen gefunden, die sich im Gegensatz zu unsern durch die quantenhafte *Emission* ergeben. Er verwendete dabei eine Differentialschaltung von zwei nebeneinander angeordneten Ionisationskammern und verstärkte die auftretenden Stromschwankungen mittels Röhrenverstärkung so weit, daß sie von einem selbstregistrierenden Spiegelgalvanometer aufgezeichnet werden konnten.

*Berechnung der Schwankungen.* Um eine Bestätigung dafür zu erhalten, daß die beobachteten Schwankungen durch die statistischen Schwankungen der quantenhaften Absorption der Röntgenstrahlen entstehen, muß man zunächst ermitteln, welche Schwankungen bei gegebener Strahlungsintensität und gegebener Größe der absorbierten Quanten theoretisch zu erwarten sind.<sup>2)</sup> Wenn (in einem definierten Volumen) in einer Sekunde im Mittel  $m$  Quanten absorbiert werden, wie groß ist dann die Streuung der tatsächlich absorbierten Quanten um diesen Mittelwert? Um diese Frage beantworten zu können, muß man zunächst die Wahrscheinlichkeit  $p_n$  kennen, daß in einer Sekunde statt  $m$  eine bestimmte Anzahl  $n$  Quanten absorbiert werden. Wir denken uns das Zeitintervall  $I$  in sehr viele ( $k$ ) Abschnitte eingeteilt. Diese Abschnitte sollen so klein sein, daß auch die Wahrscheinlichkeit sehr klein ist, daß in einem bestimmten von ihnen ein Quant absorbiert wird. Für diese Wahrscheinlichkeit können wir dann den Ausdruck  $m/k$  annehmen, also für die „Gegenwahrscheinlichkeit“, daß in einem bestimmten Abschnitt kein Quant absorbiert wird, den Ausdruck  $1 - \frac{m}{k}$ . Wählen wir daher von den  $k$  Abschnitten  $n$  bestimmte aus und verlangen, daß in diesen und nur in diesen sich je ein Absorptionsprozeß abspielt, so ist die Wahrscheinlichkeit hierfür:

$$\left(\frac{m}{k}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{m}{k}\right)^{k-n}.$$

Die Auswahl der  $n$  Abschnitte kann auf  $\binom{k}{n}$  verschiedene Arten erfolgen. Daher ist die totale Wahrscheinlichkeit, daß sich  $n$  Prozesse in einer Sekunde abspielen:

1) G. Wasastjerna, Acta Soc. Scientiarum Fennicae, Nova Series, A. 1. S. 7.

2) Vgl. Bothe, Handb. d. Phys. 22. S. 181.

$$p_n = \binom{k}{n} \cdot \left( \frac{\frac{m}{k}}{I - \frac{m}{k}} \right)^n \cdot \left( I - \frac{m}{k} \right)^k.$$

Lassen wir jetzt noch  $k$  über alle Grenzen wachsen, so wird

$$\binom{k}{n} \rightarrow \frac{k^n}{n!} \quad \text{und} \quad \left( I - \frac{m}{k} \right)^k \rightarrow e^{-m}.$$

Wir erhalten dann:

$$p_n = \frac{k^n}{n!} \left( \frac{\frac{m}{k}}{I - \frac{m}{k}} \right)^n \cdot e^{-m} = \frac{m^n}{n!} \cdot e^{-m}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß in dem Zeitintervall von einer Sekunde genau  $n$  Quanten absorbiert werden, ist also:

$$p_n = \frac{m^n}{n!} \cdot e^{-m}.$$

Wir bilden jetzt den quadratischen Mittelwert der Abweichungen  $(n - m)$  vom Mittel (d. i. die „mittlere absolute Schwankung“):

$$\Delta_n = \sqrt{\sum (n - m)^2 p_n} = \sqrt{\sum (n^2 p_n - 2 n m p_n + m^2 p_n)},$$

dabei ist  $\sum n p_n = m$  und  $\sum m^2 p_n = m^2$ , so daß wir erhalten:

$$\Delta_n = \sqrt{\sum n^2 \cdot p_n - m^2}.$$

Setzen wir für  $p_n$  den oben erhaltenen Wert ein, so ergibt sich

$$\Delta_n = \sqrt{\sum n^2 \cdot \frac{m^n}{n!} \cdot e^{-m} - m^2}.$$

Nun ist

$$\sum n^2 \frac{m^n}{n!} = (m + m^2) e^m,$$

wie durch Reihenentwicklung der Exponentialfunktion bestätigt werden kann, so daß wir erhalten:  $\Delta_n = \sqrt{m}$ . Da ja die Absorption in beiden Kammern voneinander unabhängig ist, so erhält man die Schwankung beider Kammern durch Addition der beiden (gleichen) Schwankungsquadrate. Sei  $a$  der Ausschlag des Elektrometers, den ein absorbiertes Quant bewirkt, so ist die mittlere absolute Schwankung nach  $t$  Sekunden in Skalenteilen gerechnet:

$$\Delta_n \cdot a = \sqrt{2 \cdot m \cdot t \cdot a}.$$

Aus dieser Beziehung kann man folgendes entnehmen: Bei gleicher Teilchenzahl sind die beobachteten Schwankungen bei der *Röntgenabsorption* wesentlich geringer als beim *radioaktiven Zerfall*, da die Größe der Elementarschwankung linear eingeht in die Größe der beobachteten Schwankungen. Ein mittleres  $\alpha$ -Teilchen erzeugt etwa 150000 Ionen, während ein Röntgenquant ( $K_{\alpha}$ -Molybdän) etwa 500 nur erzeugen kann. Man wird nun bei der geringen Elementarschwankung bestrebt sein, um die makroskopischen Schwankungen möglichst genau messen zu können, entweder mit einem Instrument höchster Empfindlichkeit zu arbeiten, oder die Absolutzahl der zur Absorption gelangenden Quanten möglichst groß zu machen. Das empfindlichste zur Verfügung stehende Instrument wäre an sich das Hoffmannsche Elektrometer. Da dessen Schwingungsdauer aber recht groß ist, so scheidet es nach den Betrachtungen von Campbell<sup>1)</sup> aus, der auf Grund seiner theoretischen Überlegungen möglichst Momentaneinstellung für das für derartige Messungen benützte Instrument fordert.

Um eine Bestätigung von dem statistischen Charakter unserer Schwankung zu erhalten, muß man also einerseits die Anzahl  $m$  der pro Sekunde in einer Kammer absorbierten Quanten kennen, andererseits die mittlere absolute Schwankung  $\Delta_n$ . Die letztere erhält man, wie nachher ausführlicher beschrieben wird, indem man die Spannungsschwankungen des Elektrometers in der Weise aufnimmt, daß man nach Einstellung der Kompensation den Elektrometerfaden enterdet und nach einem bestimmten Zeitintervall die entstandene Aufladung abliest. Aus einer Anzahl derart erhaltener Spannungswerte bildet man sich den quadratischen Mittelwert aus dem man nach Umrechnung der Spannungsschwankungen in Ladungsschwankungen den quadratischen Mittelwert der Schwankungen in absorbierten Quanten errechnen kann. Andererseits erhält man, wie oben erwähnt, die Anzahl im Mittel pro Sekunde absorbierter Quanten, indem die Anzahl Ionen, die bei Bestrahlung von einer Sekunde Dauer in den Kammern wandern, dividiert werden durch die Anzahl der Ionen, die ein Quant hervorruft.

1) N. Campbell, Physikal. Ztschr. 2. S. 826. 1910.

### Experimentelle Anordnung

**Monochromatisierung.** Es war schon begründet worden<sup>1)</sup>, warum mit monochromatischer Strahlung gearbeitet werden mußte. Es kam aber noch ein weiterer Grund hinzu, der ihre Verwendung notwendig machte. Eine quantitative Bestätigung der Schwankungsformel setzt die Kenntnis von Zahl und Größe der zur Absorption gelangenden Quanten voraus. Arbeitet man nun nicht mit monochromatischer Strahlung, so muß man ihre genaue spektrale Energieverteilung kennen. Es wurde schon erwähnt, daß ziemlich große Strahlungsintensitäten gebraucht wurden, damit die Schwankungen hinreichend groß wurden. Mittels Kristallreflexion lassen sich diese bekanntlich nicht erhalten. Also konnte nur so weit monochromatisiert werden, als es durch Filterung möglich ist.

Als Filtermaterial wird dabei ein solches Element verwendet, dessen Ordnungszahl im periodischen System ein wenig niedriger ist als die des benutzten Antikathodenmaterials, das die gewünschte Linie emittiert. Denn dadurch, daß die Absorptionskanten um einen kleinen Betrag verschoben sind, wird die Linie durch das Filter nur wenig geschwächt, während die gesamte Bremsstrahlung und die Linien niedriger Ordnung stark absorbiert werden. Es wurde mit der  $K_\alpha$ -Molybdänlinie gearbeitet und als Filterelement Zirkon gewählt, dessen Ordnungszahl 40 ist gegenüber 42 von Molybdän. Hergestellt wurden die Filter, indem Filtrierpapier mehrfach gleichmäßig mit einer Lösung von Zirkonnitrat getränkt wurde.

Eine Gewähr dafür, daß die Monochromatisierung für unsere Zwecke ausreichend war, ergab sich aus folgendem Versuch. Es wurde eine Anzahl auf gleiche Absorptionsfähigkeit geprüfter Filter hergestellt und untersucht, wie sich bei zunehmender Filterdicke und damit verbundener Änderung der spektralen Energieverteilung der gefilterten Strahlung der Absorptionskoeffizient änderte. Solange monochromatische Strahlung noch nicht praktisch erreicht war, mußte also bei Hinzunahme eines weiteren Filters der Absorptionskoeffizient sich ändern. Tatsächlich ließ sich dieses gut beobachten, wie aus folgender Kurve (Fig. 1) zu ersehen ist.

Da sehr starke Filter hergestellt waren, und diese Untersuchung außerdem mit Gruppen von drei Filtern gemacht war,

1) S. 454.

liegt die Hauptänderung des Absorptionskoeffizienten schon innerhalb des ersten Filters, so daß dann im weiteren Verlauf nur noch relativ geringe Änderungen gefunden wurden. Deutlich sieht man aber trotzdem, daß der Absorptionskoeffizient einen Grenzwert erreicht. Eine Bestätigung dafür, daß dieser Absorptionskoeffizient der der  $K_\alpha$ -Molybdänlinie ist, wurde folgendermaßen gefunden. Die reine  $K_\alpha$ -Linie wurde mittels Kristallreflexion hergestellt und der Absorptionskoeffizient des Filters mittels Ionisationskammer bestimmt. Hierbei wurde derselbe Absorptionskoeffizient 2,2 erhalten. Durch die Ver-

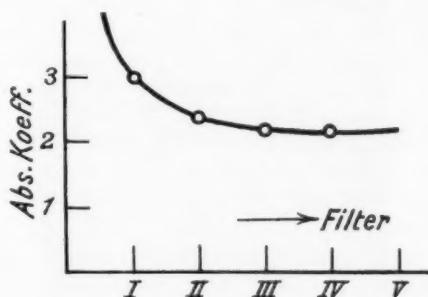


Fig. 1

wendung des Filters zur Bestimmung des Absorptionskoeffizienten bestand die Möglichkeit, daß sich die Strahlung, trotzdem ein Absorptionskoeffizient gefunden wurde, aus zwei Komponenten zusammensetzte, da das Zirkon eben in diesem Bereich seine Absorptionskante hat. Deshalb wurde der Sicherheit halber die Strahlung, mit der gearbeitet wurde, noch weiterhin mit Aluminium untersucht, indem der Absorptionskoeffizient von Aluminiumfolien mehrfach bestimmt wurde, wenn die Strahlung weiterhin noch durch Aluminium geschwächt war. Aber es zeigte sich, daß sich derselbe nicht mehr änderte. Trotz des konstanten Absorptionskoeffizienten hat natürlich die durch Filterung monochromatisierte Strahlung doch nicht den Grad spektraler Reinheit, den eine durch Kristallreflexion erhaltene haben würde, aber für den hier verwendeten Zweck war dieselbe ausreichend.

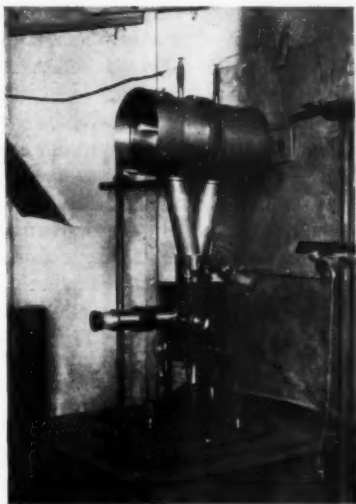
*Apparatur.* Zum Betrieb des Röntgenrohrs diente ein Transformator, der, wie schon erwähnt, zwecks äußerster Konstanz nicht mit dem Wechselstrom des städtischen Netzes betrieben wurde, sondern seine Energie einer Akkumulatoren-batterie des Instituts entnahm, bestehend aus 110 hintereinander geschalteten Zellen von einer Kapazität von etwa 80 Amperestunden, deren Strom mittels eines rotierenden Umformers in 50-periodischen Wechselstrom verwandelt wurde. Die Schleifkontakte dieses Umformers mußten vor jeder Messung neu abgeschmiegelt werden, da nur so der Umformer die für diese Messungen nötige Konstanz ergab, so daß die Spannungsschwankungen unter 0,1 Proz. blieben. Die Sekundärklemmen des Transformators wurden direkt an das verwendete Röntgenrohr angeschlossen. Das Rohr war ein Siemensstrahlenschutzrohr mit Glühkathode, das also nicht mit Gleichstrom, sondern mit zerhacktem sinusförmigen Wechselstrom betrieben wurde. Zur Heizung des Rohrs diente eine 10-Volt-Batterie, die aber nicht, wie vielfach üblich, auf Hochspannung gelegt werden konnte, da hierfür nur eine nichtisolierbare Batterie des Instituts zur Verfügung stand.

Hieraus ergab sich aber eine Schwierigkeit: Die Kühlung der Antikathode. Da diese auf Hochspannung lag, konnte nicht die übliche Wassenumlaufkühlung verwendet werden. Versuche mit einer technischen *Siedekühlung* ergaben erstens zu geringe Kühlmöglichkeit, so daß mit geringerer Emission hätte gearbeitet werden müssen, zweitens die Schwierigkeit, daß ein Rohr mit Siedekühlung nicht längere Zeit mit größerer Emission kontinuierlich betrieben werden kann; abgesehen von der Unterbrechung, die das bei hoher Emission häufig notwendige Ergänzen des Kühlwassers bedingt, bewirkt auch die dabei auftretende Temperaturänderung des Kühlwassers eine kleine Änderung der Emission, die eine Gleichgewichtsstörung der Kammern mit sich bringen würde. Die Kühlung wurde deshalb in folgender Weise vorgenommen:

Leitungswasser lief durch eine einfache Anordnung gleichzeitig in vielen Tropfen in einen isoliert aufgehängten Trichter und floß vom Trichter durch Niveaudifferenz durch gegen Erde isoliert aufgehängte Schläuche zur Antikathode und zurück. Ein kontinuierliches Abfließen zur Erde, das einen Kurzschluß zwischen der auf Hochspannung befindlichen Antikathode und

Erde bedeutet hätte, verhinderte sich dadurch von selbst, daß das durch eine gewisse Luftstrecke frei fallende Wasser infolge Abstoßung der einzelnen Teilchen von gleicher Aufladung in ungezählte Tropfen auseinander gespritzt wurde. Die bei Dauerbetrieb und äußerster Konstanz mögliche Emission war 10 mA.

Die eigentliche Ionisationsapparatur sah folgendermaßen aus:



Meßapparatur

Fig. 2

Auf einem Leybold-Einfadenelektrometer waren die beiden Ionisationskammern mittels eines Verbindungsstückes aus Messingrohren aufmontiert, das gleichzeitig als elektrostatischer Schutz der Zuführungen diente. Bei der Herstellung der Kammern wurden die von Kulenkampff<sup>1)</sup> für Präzisions-ionisationskammern angegebenen Richtlinien beachtet. Der Durchmesser der Kammern betrug 100 mm und die Länge etwa 95 mm. Wie schon erwähnt, mußte das Volumen der Kammern zwecks Abstimmung der Kompensation variierbar

1) H. Kulenkampff, Ann. d. Phys. **79**, S. 104. 1926.

sein. Deshalb wurde die Länge der Kammern veränderbar hergestellt. Bei der einen Kammer mittels Grobregulierung durch einfaches Herausziehen eines zweiten zylindrischen Rohres, während dasselbe bei der zweiten Kammer mit Gewinde von 1 mm Ganghöhe versehen war, und somit eine Feinregulierung ermöglichte. Bei einer Winkeldrehung des Hilfszylinders der zweiten Kammer um 36 Grad ergab sich eine Volumenänderung von 0,1 Proz. Kleinere Winkeldrehungen hatten keinen Sinn, da infolge feinster Deformation des (schon besonders stark gewählten) Zylinders beim Berühren mit der Hand die die Kammernrohre begrenzenden Aluminiumfolien sich leicht durchbiegen konnten, so daß auf diese Weise größere Volumenänderungen auftreten konnten. Die Folien bestanden aus etwa 0,005 mm dickem Aluminium und waren mittels eines konischen Klemmrings auf den Messingkammern straff aufgespannt, wodurch das Volumen der Kammern exakt definiert war. Da aber noch kleinere Volumenänderungen als 0,1 Proz. erforderlich waren, wurden diese anfangs durch kleine, beim Gegenblasen gegen die Folien entstehenden Durchbiegungen erzeugt. Da aber auch diese Methode nicht befriedigte, wurden zum allerletzten Auskompensieren bis auf 0,01 Proz. die Streustrahlen eines mit einer 5 mm dicken Paraffinschicht überzogenen Bleiblechs von 2 mm Dicke verwendet, das hinter beiden Kammern in veränderbarem Abstand im Winkel von  $45^\circ$  in den Strahlengang gehalten wurde. Hierdurch wurde gleichzeitig der Beobachter, der sich unter dem Strahlenkegel befand, vor der bei Dauerbeobachtung gefährlichen Streustrahlung geschützt.

Die Form der Kammern, die an sich für die Sättigung recht ungünstig ist, wurde aus folgenden Gründen gewählt: Erforderlich war möglichst große Strahlungsintensität. Drei Größen konnten verändert werden, wie aus der abgeleiteten Beziehung  $\Delta_n a = \sqrt{2 m t \cdot a}$  zu ersehen ist. 1. Die Quantgröße. Diese war festgelegt durch Verwendung der Molybdänstrahlung. 2. Die pro Zeiteinheit absorbierte Anzahl Quanten, die gegeben ist durch Strahlungsdichte und Kammervolumen. 3. Das Zeitintervall  $t$ . Die maximale Strahlungsdichte wurde ausgenutzt, indem mit höchstmöglicher Emission gearbeitet wurde, und außerdem die Apparatur möglichst nahe an die Strahlungsquelle herangebracht wurde. Der Abstand zwischen Fokus



und erster Kammer betrug 16 cm und war bedingt durch Isolation, Strahlenschutz, Blenden usw. Die Kammernvolumina sind bestimmt durch Durchmesser und Länge der Kammern. Die Größe der Durchmesser war begrenzt durch die Forderung nach exakter Sättigung in den Kammern. Für die Kammernspannungen standen insgesamt 2200 Volt zur Verfügung. Leider war die mittlere Feldstärke in den Kammern nicht ausreichend, wenn die Innenelektrode der Kammern exzentrisch angeordnet war, wie man es im allgemeinen tut, um dieselbe vor Strahlung zu schützen. Deshalb mußten die konzentrisch angeordneten Innenelektroden durch geeignete Ausblendung vor Bestrahlung geschützt werden, so daß der Strahlungsquerschnitt ringförmig war. Als Kammernlänge wurde etwa 10 cm gewählt. Maßgebend hierfür war die schon erwähnte Forderung nach Temperaturkonstanz in dem gesamten Kammervolumen, die bei größerer Dimensionierung nicht mehr so leicht erfüllt werden könnte.

Durch Vergrößerung der dritten Größe, des Zeitintervalls  $t$  (aus  $\Delta_n = \sqrt{2 \cdot m \cdot t \cdot a}$ ) könnte man die Schwankung beliebig groß machen. Aber, da äußere systematische Störungen auftraten, wie nachher beschrieben wird<sup>1)</sup>, die proportional mit der Zeit zunahmen, während die statistischen Schwankungen nur mit der Wurzel aus der Zeit wachsen, mußte man im Gegenteil bestrebt sein, das Zeitintervall möglichst klein zu halten. Nach unten war das Zeitintervall begrenzt durch die Ablesegenauigkeit und durch die bei unserer subjektiven Ablesung unsichere Reaktionsgeschwindigkeit beim Enterden des Elektrometers und beim Ablesen desselben. Als Zeitintervall wurden 10 Sek. gewählt.

Die Zeitsignale gab das Ticken einer Pendeluhr, deren ganze Schwingungsdauer durch ein großes feinregulierbares Gegengewicht am Pendel auf 10 Sek. gebracht war. Hierbei war es ziemlich schwierig, die bei so ungewöhnlich langer Schwingungsdauer auftretende Tendenz des Pendels zu Querschwingungen, senkrecht zur eigentlichen Schwingungsebene, zu beseitigen. Deshalb wurden am Pendel kleine Gewichte angebracht, deren Lage mittels Gewinde verändert werden konnte, wodurch sich das Gleichgewicht exakt herstellen ließ.

---

1) S. 472 u. 473.

Zur Ausblendung der Strahlung wurden in üblicher Weise zwei hintereinander stehende Blenden (im Abstand von 34 mm) verwendet, die aus Silber hergestellt waren und leicht konisch waren. Nach den Ausführungen von Kulenkampff<sup>1)</sup> ist bei Verwendung von Molybdänstrahlung Silber besonders geeignet, da hierbei die Streustrahlung besonders gering ist. Die Blenden hatten eine innere Öffnung von 19 und 30 mm. Aber nur die erste Blende hatte die erwähnte zentrische Ausblendung. Diese war infolge der Strichförmigkeit des Brennflecks elliptisch hergestellt, mit den Achsen 4 und 6 mm, und war mittels eines dünnen Silberdrahts — zwecks bequemer Justierung um einen kleinen Betrag veränderbar — auf der Blende befestigt.

Da für die Justierung der Blenden keine geeignete Schlitteneinrichtung zur Verfügung stand, wurde mit folgender einfacher Anordnung gearbeitet, die sich aufs beste bewährte. Die Blenden wurden von einem Hufeisenmagnet in jeder Lage bequem gehalten, und zwar mittels kleiner Eisenbleche, die seitwärts an den Blenden angelötet waren. Die Justierung von Blenden und Innenelektroden erforderte einige Übung. Sie geschah mittels Leuchtschirm und wurde photographisch geprüft. Zunächst wurden die Kammern so aufgestellt, daß die Innenelektroden, vom Brennfleck aus gesehen, genau hintereinander standen. Bei der Justierung der Blenden mußte nun darauf geachtet werden, daß die Strahlung von den Kammerwänden stets einen Abstand von 1 cm hatte, damit die Ionisation der Photoelektronen voll ausgenutzt wurde, und daß die konzentrische Ausblendung richtig eingestellt war.

Die Akkumulatorenatterie, die die Spannungen für die Ionisationskammern lieferte, setzte sich aus hintereinandergeschalteten Zellen von Liman und Oberländer und Cremorzellen zusammen. Sie war in der Mitte über einen Widerstand geerdet. Besondere Sorgfalt mußte auf die Kontakte verwendet werden, die durch das „Kriechen“ der Akkumulatorsäure immer wieder zu Wackeleien neigten. Die kleinsten Störungen der Batterie wirkten sich aber kapazitiv über die Kammern auf die Innenelektroden und somit auf den Elektrometerfaden aus, der unter dem Einfluß solcher Wackelkontakte in ganz ähnlicher Weise zuckte, wie bei den statistischen

1) H. Kulenkampff, Ann. d. Phys. 79. S. 104. 1926.

Schwankungen. Diese konnten aber dadurch leicht voneinander getrennt werden, daß zu den Störungen keine Strahlung nötig war. Derartige Wackelkontakte konnten nur durch systematisches Abklopfen der Batterie und aller Zuführungen gefunden werden, während gleichzeitig das Elektrometer auf plötzliches Zunehmen der Störungen hin beobachtet wurde.

Für das benutzte Leybold-Einfadenelektrometer wurden als Schneidenspannung zwei übliche Anodentrockenbatterien zu je 100 Volt verwendet, die über zwei hochohmige Widerstände (1 Meg. Ohm) mit den Schneiden verbunden waren. Sie waren in der Mitte geerdet, jedoch um den kleinen Betrag von 2 Volt in bekannter Weise stetig veränderlich, indem zu den 2 Volt parallel ein Schiebewiderstand geschaltet war, dessen veränderlicher Pol mit Erde verbunden war. Großer Wert mußte bei den Schwankungsmessungen auf momentanes Einstellen des Elektrometerfadens und Konstanz des Nullpunktes gelegt werden. Bei größerer Empfindlichkeit des Elektrometers (etwa 3 mV/Skt.) waren diese Bedingungen nicht zu erfüllen, so daß leider mit wesentlich geringerer Empfindlichkeit gearbeitet werden mußte (etwa 40 mV/Skt.). Außerdem erwies sich auch eine 90-Grad-Drehung der Quarzschlinge des Elektrometerfadens für die Momentaneinstellung des Fadens von Nutzen.

Der verwendete Erdschalter mußte äußerst zuverlässig arbeiten. Deshalb wurde er, wie üblich, aus Platin hergestellt und durch gute Führung vor jeder seitlichen Reibung und Torsion geschützt. Er war von dem Elektrometergehäuse durch Hartgummi-Isolation getrennt, so daß er gleichzeitig zur Zuführung veränderlicher Hilfsspannungen verwendet werden konnte, die zur Empfindlichkeitsbestimmung gebraucht wurden. Die Hilfsspannung gab ein Element, dessen Spannung mit einem 10-Ohm-Instrument bestimmt werden konnte und mit Hilfe eines guten 1000-Ohm-Stöpselwiderstandes potentiometrisch verändert werden konnte. Zwecks einfacherer Auswertung der Schwankungsmessungen wurde dem Elektrometer jedesmal die gleiche Empfindlichkeit auf beiden Seiten gegeben.

Die Ionisationsapparatur war gegen elektrische und thermische Störungen durch einen geerdeten Zylinder aus Kupferblech geschützt, der mit Filz bekleidet war. Denn schon geringe

Temperaturschwankungen zwischen beiden Kammern konnten infolge der Dichteänderung der in den Kammern befindlichen Luft zu großen Störungen Anlaß geben. Würde nach Einstellung des Gleichgewichts die Temperatur einer Kammer nur um  $\frac{1}{100}$  Grad verändert (was ohne Schutzzylinder z. B. durch Gegenatmen beim Beobachten möglich wäre), so würde

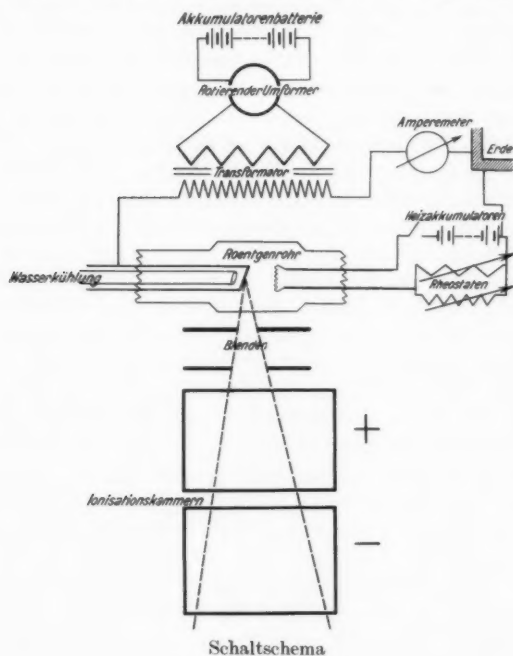


Fig. 3

das eine Gleichgewichtsstörung von 100 mV in dem Zeitintervall von 10 Sek. ergeben. An verschiedenen Stellen des Zylinders waren Öffnungen angebracht, die eine Bedienung der Apparatur auch im eingekleideten Zustand ermöglichten, und jederzeit durch entsprechende Klappen wieder geschlossen werden konnten. Außerdem war das Rohr nebst Zuführungen von der Apparatur durch eine geerdete Blechwand getrennt, und die Zuführungen der Kammernspannungen in geerdeten

Röhren geführt, so daß alle elektrischen Störungen aufs beste vermieden werden konnten. Gute Temperaturkonstanz war dadurch erreicht, daß die Arbeit in dem Kellergeschoß des äußerst massiven Institutes ausgeführt wurde.

Fig. 3 zeigt das Schema der gesamten Anordnung.

### Störungen

*Schwingeffekt.* Folgende Schwierigkeit zeigte sich, deren Ursache ermittelt werden mußte. Wurde an beide Kammern gleichhohes (entgegengesetztes) Potential gelegt, so ergab sich ein schnelles Schwingen des Elektrometerfadens, das ihn völlig unscharf machte. Da dieses Schwingen etwa mit der Frequenz 50 Perioden in der Sekunde zu erfolgen schien, wurde für die Ursache zunächst irgendeine schlechte Erdung des Elektrometers oder des Schutzgehäuses oder einer Zuführungen der Kammernspannungen gehalten, die eine Übertragung der 50 Periodenfrequenz der Hochspannung ermöglichte. Denn tatsächlich wurden früher auch Störungen ganz ähnlicher Art beobachtet. Da dieses Schwingen aber nicht eintrat, wenn nur die Hochspannung eingeschaltet war, konnte nur die Strahlung selbst den Anlaß dazu geben. Als zufällig den Kammern verschiedenes Potential gegeben war, zeigte sich, daß das Schwingen geringer war, und bei einem bestimmten Verhältnis der Kammernspannungen sogar völlig zum Verschwinden zu bringen war. Der Effekt wurde also dadurch beseitigt, daß man in beiden Kammern verschiedene Feldstärken herstellte. Da die Strahlen in beiden Kammern nicht parallel waren, sondern der Öffnungswinkel sogar ziemlich groß war, waren die Wege, die die Ionen bis zur Innenelektrode zu machen hatten, zwischen beiden Kammern verschieden. Bei gleichen Feldstärken in den Kammern müssen also die Ionen zu verschiedenen Zeiten ankommen. Das bedingt eine kurzzeitige Gleichgewichtsstörung im 50-Periodentakt, da die Strahlung, wie schon berichtet, intermittierend war. Dieser Effekt konnte also dadurch beseitigt werden, daß in den Kammern verschiedene Feldstärken hergestellt wurden, die die Wanderungsgeschwindigkeiten so verschieden machte, daß die Ionen trotz des Wegunterschiedes zu gleichen Zeiten ankamen. Um bei den zur Verfügung stehenden Spannungen in beiden Kammern gute Sättigung zu haben, wurde die Verschiedenheit

der Feldstärken in ihnen dadurch erreicht, daß die Innenelektroden aus verschieden dicken Zylindern hergestellt wurden. Zwecks besserer Anpassung an die Strahlung wurden sie schließlich konisch gemacht, wobei der Öffnungswinkel gleich dem der Strahlung gemacht wurde. Da dieser nicht exakt bestimmt war, und da außerdem die verschiedene Strahlungsdichte in beiden Kammern hätte berücksichtigt werden müssen, wurde mit diesen zylindrischen Elektroden nicht gleich völlig die Beseitigung des Zittereffekts erreicht, aber der Rest ließ sich bequem durch kleine entsprechende Änderung des Kammernspannungsverhältnisses beseitigen.

*Rückwanderungseffekt.* Der Grad der Sättigung konnte bei dieser Anordnung überaus genau festgestellt werden. Im allgemeinen bestimmt man die Sättigung, indem man die Aufladezeit des Elektrometers auf eine bestimmte Spannung in Abhängigkeit von der angelegten Kammernspannung mißt, wobei man also bei fehlender Sättigung eine Änderung der Wanderungszeit erhält. Bei dieser Kompensationsmethode hatte man den Vorteil, daß die gleichmäßige Wanderung auskompensiert war. Deshalb waren bei Änderung der Kammernspannungen äußerst kleine Änderungen des Ionisationsstroms feststellbar. Jedoch war die Sättigung zunächst nur mit der gewöhnlichen unempfindlichen Methode bestimmt und ein genügender Sättigungsgrad schien schon erreicht zu sein. Daß aber äußerst gute Sättigung und vor allen Dingen genaue Kenntnis von dem Grad der Sättigung für derartige Messungen erwünscht ist, war schon früher erwähnt worden.<sup>1)</sup>

Lädt man nämlich den Elektrometerfaden auf eine bestimmte Spannung auf, so wird die Spannungsdifferenz zwischen dem Faden und der einen Kammer um denselben Betrag vergrößert, wie die der anderen verringert wird. Hatte man vorher beide Kammern auf Gleichheit auskompensiert, so mußte im Falle nicht genügender Sättigung das Gleichgewicht gestört sein, weil jetzt infolge Änderung der relativen Kammernspannungen die Ionisationsströme verschieden sind. Der Faden würde dann so lange zurückwandern, bis er in die alte Nulllage käme und zwar mit exponentiell abnehmender Geschwindigkeit. Die Geschwindigkeit dieser Rückwanderung hängt nun von dem Grad der Sättigung ab. Bei unseren statistischen

1) S. 456.

Schwankungen muß diese Rückwanderung berücksichtigt werden. Stellte man durch Kompensation das Gleichgewicht her, so würde dieses durch die statistischen Schwankungen der quantenhaften Absorption gestört, die ein Fortwandern des Fadens vom Nullpunkt bewirkten. Im völlig gesättigten Zustand der Kammern würde er sich auch wirklich auf die Spannung aufgeladen haben, die in diesem Zeitintervall allein den statistischen Schwankungen entspräche. Ist dagegen keine vollkommene Sättigung vorhanden, so würde sich der reinen Schwankung eine Rückwanderung überlagern, wie sie durch den Grad der Sättigung bestimmt ist. Es ist dann nötig, diese Rückwanderung genau zu kennen. Ein derartiger Rückwanderungseffekt ist einwandfrei festgestellt worden. Von derselben Wirkung wäre ein einfacher Isolationsfehler gewesen. Ein solcher war aber dadurch vollkommen vermieden, daß zwischen der auf Hochspannung befindlichen Kammernelektrode und der Innenelektrode ein geerdeter Schutzring in den Bernsteinisolator eingefügt war. Ein einfacher Versuch zeigte sodann, daß der beobachtete Effekt tatsächlich so zustande kam, wie beschrieben wurde. Hatte man das Gleichgewicht der Kammern eingestellt und nun die eine Kammernspannung um einen bestimmten Betrag verändert, so begann bei eingeschalteter Röntgenstrahlung der Faden zu wandern und kam erst an der Stelle zur Ruhe, die einem Potential entsprach, das halb so groß war wie die vorgenommene Änderung der Kammernspannung. Das beweist, daß bei nicht genügender Sättigung der Faden sich zwangsläufig auf ein Gleichgewicht einstellt, das — bei gleicher Dimensionierung von Kammern und Strahlung — natürlich gerade bei der Gleichheit der relativen Kammernspannungen liegt. Es war deshalb nötig, die Rückwanderung genau zu kennen, weil sie sich durch Wahl geeigneter Bedingungen nur sehr klein machen ließ, aber nicht gänzlich zum Verschwinden zu bringen war. Die Größe der Rückwanderung wurde folgendermaßen bestimmt. Die Rückwanderungsgeschwindigkeit  $V$  ist mit sehr großer Näherung proportional dem Ausschlag  $a$ . Also  $V = c \cdot a$ . Und der Ausschlag  $a$  auf Grund der Theorie der statistischen Schwankungen im Mittel proportional der Wurzel aus der Zeit. Also  $a = k \cdot \sqrt{t}$ . Wenn  $R$  der Betrag der Rückwanderung ist, dann ergibt sich für  $dR$ , da ja  $V = c k \sqrt{t}$  ist,  $dR = V dt = c k \cdot \sqrt{t} dt$ . Der

Betrag der Rückwanderung ist also, wenn der Elektrometerfaden in der Zeit  $t$  von 0 bis  $a$  gewandert ist,

$$= R = c \cdot k \cdot \int_0^t \sqrt{t} dt = c \cdot k \cdot \frac{2}{3} t^{3/2} = \underline{\underline{\frac{2}{3} \cdot c \cdot a \cdot t.}}$$

Der Ausdruck  $c \cdot a \cdot t$  gibt nun den Betrag, um den der Faden in der (kleinen) Zeit  $t$  zurückwandert, wenn man ihm einen Ausschlag  $a$  gegeben hat. Dieser Rückwanderungsbetrag mußte experimentell genau bestimmt werden. Das geschah folgendermaßen: Es wurde dem Elektrometer zwecks Ausschaltung der statistischen Schwankungen die geringe Empfindlichkeit von 1,25 Volt/Skt. gegeben, wobei die statistischen Schwankungen gerade noch andeutungsweise erkennbar waren, und dann die Gleichheit der Kammern einjustiert. Alsdann wurde dem Elektrometerfaden eine Spannung von 20 Volt (= 25 Skalenteile) gegeben und jetzt nach Enterdung des Fadens die Rückwanderung in 10 Sek. beobachtet (d. i. das Zeitintervall, bei dem die Schwankungsmessungen vorgenommen wurden). Um einen Fehler zu eliminieren, der sich dadurch hätte ergeben können, daß das Kammerngleichgewicht vorher nicht exakt eingestellt war, wurde die Hilfsspannung dem Faden positiv und negativ gegeben. Als Mittel aus zahlreichen derartigen Beobachtungen erhielt man, daß die Rückwanderung in diesem Falle in 10 Sek. 2 Proz. betrug. Es war demnach nötig, alle beobachteten Ausschläge um  $\frac{2}{3}$  von 2 Proz., also um 1,33 Proz. zu erhöhen.

*Überlagerte Gleichgewichtsstörungen.* Es war schon berichtet worden, daß sich den statistischen Schwankungen auf Grund äußerer Einflüsse andere Änderungen des Kammerngleichgewichtes überlagerten. Hierdurch ergab sich folgendes Bild: Wenn das Kammerngleichgewicht zunächst gut einreguliert war, so sah man am Elektrometer die für statistische Schwankungen typischen Zuckungen des Fadens um den Nullpunkt, die sich nur ganz allmählich von diesem entfernten. Wiederholte man solche Beobachtungen bei derselben Einstellung nach längerer Zeit (etwa 10 Min.), so sah man jetzt außer den geschilderten Zuckungen noch eine mit gleichmäßiger Geschwindigkeit erfolgende Wanderung des Fadens. Da derartige Überlagerungen ein völlig falsches Ergebnis der Schwankungs-



messungen zur Folge haben würden, wurde auf verschiedene Weise versucht, diese zu eliminieren. Es wurde zunächst geprüft, ob für diese Gleichgewichtsstörungen etwa Spannungsschwankungen des Röntgenrohres als Ursache in Frage kämen. Das Elektrometer wurde dazu ganz unempfindlich gemacht, so daß die statistischen Schwankungen verschwindend klein wurden. Dann wurden künstlich Spannungsänderungen am Rohr erzeugt. Hierbei traten deutliche Änderungen des Gleichgewichts auf. Es mußte nun festgestellt werden, in welcher Weise die Rohrspannungsschwankungen sich als Gleichgewichtsstörungen auswirken könnten, da trotz aller Versuche die Spannungsschwankungen des Rohres nicht völlig beseitigt werden konnten: Die nicht exakte Monochromatisierung schien diese Störung nicht zu ermöglichen, da eine Vergrößerung der Filterdicke keine Verbesserung ergab. Darauf wurde untersucht, ob die nicht exakte Sättigung der Kammern einen Einfluß von Spannungsschwankungen auf das Gleichgewicht der Kammern möglich machte. Infolge der Verschiedenheit der Bedingungen in beiden Kammern (verschiedene Strahlungsdichte, da die Strahlen nicht parallel sind und verschiedene Feldstärken, die, wie erwähnt, notwendig waren) war der Grad der Sättigung in beiden Kammern nicht derselbe. Änderte sich jetzt infolge von Spannungsschwankungen des Rohres die Intensität der Strahlung, so konnte sich möglicherweise der Grad der Sättigung in beiden Kammern ändern, und zwar verschieden ändern in beiden Kammern. Hierdurch würde sich dann eine Störung des Gleichgewichts ergeben. Zur Prüfung dieser Annahme wurde die durch Spannungsänderung hervorgerufene Gleichgewichtsstörung bei verschiedenem Sättigungsgrad der Kammern beobachtet. Hierbei zeigte sich deutlich, daß der Einfluß im weniger gesättigten Zustand der Kammern wesentlich größer war. Da nun zur Erhöhung der Sättigung die Kammernspannungen nicht mehr vergrößert werden konnten, wurden, wie schon erwähnt, Innenelektroden aus dicken Aluminiumkonussen verwendet, die eine wesentliche Erhöhung der mittleren Feldstärke zur Folge hatten. Hierdurch wurde erreicht, daß Spannungsänderungen des Rohres von 0,1 Proz. nur noch eine Gleichgewichtsstörung von 10 mV/sec hervorrufen konnten. Plötzliche Änderungen der Betriebsspannung des Rohres, wie sie der Wechselstrom des städtischen Netzes

macht, waren aber durch die Verwendung von Akkumulatoren zur Erzeugung des Wechselstroms ausgeschlossen. Die Kollektoren der Maschine waren, wie schon erwähnt, vor jeden Messungen aufs beste abgeschmirgelt worden, so daß auch hier keine Störungen zu erwarten waren. Nicht zu beseitigen war lediglich das Nachlassen der Akkumulatorenspannung bei längerem Betrieb, dessen Wirkung auf das Gleichgewicht deutlich feststellbar war. Dies hatte zur Folge, daß die Meßreihen nicht so groß, wie es eigentlich erwünscht wäre, gewählt werden konnten. Zur Feststellung der Konstanz der Röhrenspannung diente ein Präzisionsvoltmeter, das Primärspannungsänderungen von 0,1 Proz. deutlich anzeigte.

Außerdem mußte man sich davon überzeugen, ob Emissionsschwankungen des Rohres einen störenden Einfluß auf das Gleichgewicht haben konnten. Die kleinste Emissionsänderung, die noch deutlich am Emissionsinstrument feststellbar war, und somit noch verhindert werden konnte, betrug 0,1 Proz. Sie ergab eine Gleichgewichtsstörung von etwa 1,2 mV/sec, die jedoch vernachlässigt werden konnte.

### Messungen

*Kapazitätsbestimmung.* Wie schon erwähnt, mußte die Größe der Kapazität bekannt sein. Diese wurde derart bestimmt, daß bei äußerst schwacher Bestrahlung die Aufladezeit des Elektrometers bestimmt wurde, und mit der Aufladezeit verglichen wurde, die sich ergab, wenn zu der Apparaturkapazität noch eine große bekannte Kapazität hinzugeschaltet wurde. Zwecks größerer Genauigkeit wurde jedoch nach Abschluß der Messungen die Apparaturkapazität von der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt geeicht und ergab bei guter Übereinstimmung mit dem von uns gefundenen Werte eine Kapazität von  $13,5 \mu\text{F} \pm 0,1 = 12,1_5 \text{ cm}$ .

*Die Intensitätsbestimmung der Strahlung,* die vor und nach jeder Messung vorgenommen wurde, geschah auf folgende Weise. Das Naheliegendste wäre gewesen, beide Kammern gleichnamig aufzuladen, und zur Verringerung der hierbei auftretenden großen Wanderungsgeschwindigkeit — wenn man nicht mit kurzzeitigem Blendenverschluß arbeiten wollte — mit parallel geschalteter großer Kapazität die Aufladegeschwindigkeit zu messen. Jedoch aus verschiedenen Gründen, deren Erörterung

zu weit führen würde, wurde nur der ersten Kammer Potential gegeben, während die zweite Kammer Erdpotential erhielt. Jetzt mußte aber diese vor Strahlung geschützt werden, da sonst die durch die erste Kammer sich ergebende Aufladung bei Bestrahlung durch die zweite wieder abgefließen wäre. Geschützt wurde die zweite Kammer vor Strahlung dadurch, daß zwischen beide Kammern ein Bleischirm von 2 mm Dicke gehängt wurde, der auf der der ersten Kammer zugewendeten Seite mit einer 3 mm dicken Paraffinschicht überzogen war, um die vom Blei ausgehende Sekundärstrahlung zu absorbieren. Es kam also nur die Streustrahlung vom Paraffin in die Kammer zurück. Der durch sie bedingte kleine Fehler wurde experimentell genau bestimmt und bei der Intensitätsbestimmung in Anrechnung gebracht. Diese Bestimmung geschah folgendermaßen. Man stellte das Kammerngleichgewicht bei relativ unempfindlichem Elektrometer her und hielt sodann den Schirm hinter die zweite Kammer, wobei die Streustrahlung des Schirms im wesentlichen die zweite Kammer traf. Die dadurch bedingte Gleichgewichtsstörung wurde bei verschiedenen Schirmabständen genau ermittelt und graphisch mit großer Genauigkeit die Streustrahlung für den Abstand bestimmt, den der Schirm von der ersten Kammer hatte bei der Intensitätsbestimmung. Es ergab sich eine Aufladung von 11,8 Volt/sec. Um diesen kleinen Betrag mußte also die bei der Intensitätsbestimmung mit Schirm gefundene Aufladung verringert werden. Der für die Intensitätsbestimmung verwendete Glimmerkondensator wurde ebenfalls von der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt geeicht und ergab eine Kapazität von  $0,100_1 \mu\text{F} = 90180 \text{ cm} \pm 90$ . Die Verbindung des Kondensators mit dem Elektrometer wurde in der Weise hergestellt, daß dieser hinter der zweiten Kammer aufgestellt wurde, und durch die letzte Aluminiumfolie ein Loch von etwa 1 cm Durchmesser gebohrt wurde, durch das ein Verbindungsdraht geführt wurde, der federnd auf der Innenelektrode auflag.

*Der Gang der Schwankungsmessung.* Hatte man sich zu Beginn davon überzeugt, daß das Elektrometer ohne Bestrahlung bei Enterdung absolut ruhig war (also weder schlechte Erdung noch Isolationsfehler vorhanden), so wurde die Wechselstrommaschine unter Benutzung der gut geladenen Akkumulatoren als Energiequelle angelassen und Kathodenheizung sowie Hoch-

spannung angeschaltet. Nach etwa einer halben Stunde, während der der Heizstrom mehrfach nachreguliert werden mußte, hatten sich die Akkumulatoren auf einen konstanten Wert eingestellt, und auch die Maschine sich gut eingelaufen, so daß sich keine nennenswerte Änderung der Emission und der Primärspannung mehr zeigte. Es wurde jetzt Barometerstand und Temperatur notiert und die Intensität der Strahlung bestimmt. Zu diesem Zweck wurde die schon vorher beschriebene Schaltung vorgenommen. (Erste Kammer auf Spannung, zweite auf Erde, zwischen beiden Kammern Bleiparaffinschirm, großer Zusatzkondensator mit zweiter Innenelektrode verbunden.) Dann wurde die Empfindlichkeit des Elektrometers bestimmt, indem man bei verschiedenen — mittels Potentiometers erhältlichen — Hilfsspannungen den Ausschlag des Fadens ablas. Jetzt bestimmte man die Aufladung des Elektrometers bei Enterdung bis auf eine bestimmte Spannung (15 Skalenteile) mittels einer geeichten Stoppuhr, der größeren Genauigkeit halber etwa 10 mal. Die Emission war hierbei auf 10 mA einreguliert, und die gleichzeitige Primärspannung abgelesen. Da sich während der Messung infolge Nachlassens der Akkumulatoren die Primärspannung erniedrigte, wurde die Intensität der Strahlung bei einer zweiten Primärspannung bestimmt, die etwa 2 Proz. geringer war als die erste, so daß dann bei jeder Meßreihe die Intensität jeweilig durch Interpolation gefunden werden konnte. Der kleine Betrag um den dabei die Spannung verändert wurde, wurde durch Einschalten eines Widerstandes in den Primärkreis erhalten. Die dabei auftretende Abweichung des Wechselstroms von der Sinusform konnte vernachlässigt werden.

Jetzt wurde die Kompensationsschaltung hergestellt. (Hilfskondensator abgeschaltet, Bleischirm entfernt, zweite Kammer auf Spannung, durchbohrte Aluminiumfolie erneuert.) Dann mußte das Gleichgewicht exakt hergestellt werden, das vorher schon einigermaßen bestand, so daß zur Feinregulierung nur noch der Abstand des schon erwähnten Bleiparaffinschirms von der zweiten Kammer verändert zu werden brauchte. Wie schon in der Einleitung auseinandergesetzt wurde, läßt sich die Kompensation nicht feiner als die durch die statistischen Schwankungen gegebene Grenze einregulieren. Will man umgekehrt die statistischen Schwankungen erfassen, so muß man

die systematische Ungleichheit zwischen beiden Kammern zum Verschwinden gebracht haben. Da nun aber systematische Schwankungen nicht genauer beseitigt werden können, als durch die statistische Grenze gegeben ist, mußte man zur Herstellung der Kompensation eine Reihe von Ausschlägen des Elektrometers in der Art der Schwankungsmessungen aufnehmen und feststellen, ob sich im Mittel noch eine nennenswerte Herauswanderung des Elektrometerfadens ergäbe. Dieses Einjustieren wurde dadurch ganz wesentlich erleichtert, daß nicht exakt der Nullpunkt der Mittelwert der Schwankungen zu sein brauchte. Wurde jetzt noch einmal die Emission nachreguliert und die Primärspannung abgelesen, so konnte mit der eigentlichen Schwankungsaufnahme begonnen werden.

Die von der schon beschriebenen Pendeluhr gegebenen und ohne Verstärkung deutlich vernehmbaren Zeitzeichen im Abstand von 5 Sek. wurden nun in der Weise verwendet, daß beim ersten Zeichen das Elektrometer enterdet wurde, und beim dritten, also nach 10 Sek., die Stellung des Fadens abgelesen wurde. Es erforderte einige Übung, in konstanter Weise auf die Zeitzeichen zu reagieren und außerdem mußte das Ablesen des zuckenden Fadens zu einem ganz bestimmten Zeitpunkt besonders gelernt werden. Nach Notierung des Wertes wurde das Elektrometer wieder geerdet und beim folgenden Zeitzeichen wieder enterdet. Hatte man auf diese Weise 20 Werte erhalten, so wurde wieder die Primärspannung und die Emission abgelesen, die sich aber im allgemeinen nach so kurzer Zeit nicht geändert hatten. Außerdem mußte man sich durch Stichproben davon überzeugen, daß die Elektrometerempfindlichkeit gleichgeblieben war. Auch dieses war im allgemeinen nach so kurzer Zeit noch der Fall. Zeigte sich aber nach einer solchen Meßreihe, daß der Mittelwert der Schwankungen sich von der Null-Lage erheblich entfernt hatte, so wurde mittels Veränderung des Schirmabstandes das Gleichgewicht wieder hergestellt. Am Ende von 20 derartigen Meßreihen von je 20 Werten wurde wieder die Intensität bestimmt, indem man die Schaltung dementsprechend veränderte. Dann wurde mehrfach die Schwingungsdauer der Pendeluhr über eine größere Anzahl Schwingungen hinweg mittels einer geeichten Stoppuhr bestimmt.

Während der jetzt eingelegten Pause von etwa einer halben

Stunde wurde der Betrieb des Rohres nicht unterbrochen. Dieselbe war nur deshalb nötig, da derartiges Ablesen eines zuckenden Elektrometerfadens für die Augen recht anstrengend ist, ganz abgesehen davon, daß die Messungen im geschlossenen Kellerraum des Instituts stattfanden, der trotz der sich durch die Hochspannung bildenden Ozonluft, die stark ermüdend ist, zwecks Temperaturkonstanz nicht ventiliert wurde. Außerdem muß erwähnt werden, daß der größte Teil der Messungen nachts stattfand, da wegen der notwendigen Konstanz der Röhrenspannung die Akkumulatorenbatterie, die tagsüber anderweitig gebraucht wurde, nicht gleichzeitig von anderen benutzt werden durfte.

*Die Auswertung der Messungen.* Es ist schon auseinander gesetzt worden, daß die gefundenen Schwankungen dadurch als statistische Schwankungen der quantenhaften Absorption identifiziert werden sollten, daß eine Übereinstimmung gefunden wurde zwischen

$$\Delta_n \text{ und } \sqrt{2 m t}.$$

Der quadratische Mittelwert der Schwankungen  $\Delta_n$  ergibt sich durch folgende Auswertung der Beobachtungen. Infolge der Nichtlinearität der Elektrometerempfindlichkeit mußte jeder einzelne abgelesene Wert entsprechend umgerechnet werden. Außerdem ergab der ausführlich behandelte Rückwanderungseffekt<sup>1)</sup> eine kleine Erhöhung der Ausschläge. Diese beiden Umrechnungen konnten dadurch zusammengefaßt werden, daß die Empfindlichkeitskurven des Elektrometers in der Weise hergestellt wurden, daß dabei die Spannungswerte um den kleinen Rückwanderungsbetrag erhöht wurden. Aus solchen Empfindlichkeitskurven erhielt man durch Ablesung der den Elektrometeraus schlägen zugeordneten mV-Werte die statistischen Schwankungen als Spannungsschwankungen des Elektrometerfadens. Bildete man jetzt in bekannter Weise das Mittel der Ausschläge, die einzelnen Abweichungen von diesem Mittel, die Quadrate der Abweichungen und schließlich das Mittel der Quadrate, so erhielt man das mittlere absolute Schwankungsquadrat in  $\text{mV} = \Delta_v^2$ . Dividierte man  $\Delta_v$  selbst durch 300000 und multiplizierte man diesen Wert mit der Apparatekapazität (12,15 cm), so erhielt man die mittlere

1) S. 470.

absolute Schwankung in Ladungseinheiten. Durch Division durch  $e$  (das elektrische Elementarquant) ergab sich die Schwankung in Ionen. Um nun die Schwankung in Quanten zu bekommen, muß die vielfach experimentell bestimmte Größe vorausgesetzt werden, d. i. die Energie (in Volt/Elektron), die das ionisierende Elektron verbraucht, um ein Ionenpaar zu bilden. Nimmt man hierfür den Wert 36 Volt/Ionenpaar<sup>1)</sup>, so ergab sich bei der Anregungsspannung der hier verwendeten *K*-Molybdänlinie von 20000 Volt die von einem absorbierten Quant erzeugte Anzahl Ionenpaare als  $20000/36 = 555$ . Durch Division durch 555 erhielt man also die mittlere absolute Schwankung in Quanten  $= \Delta_n$ . Somit ergab sich folgende Beziehung:

$$\Delta_n = \Delta_e \cdot \frac{12,15}{300000 \cdot 4,774 \cdot 10^{-10} \cdot 555} = \Delta_e \cdot 152,8.$$

Die Anzahl  $2mt$  der in beiden Kammern im Mittel im Zeitintervall  $t$  absorbierten Quanten erhielt man dadurch, daß man zunächst die Anzahl pro Sekunde in beiden Kammern wandernder Ionenpaare bestimmte. Aus den bei zwei bekannten Primärspannungen des Transformators erhaltenen Aufladezeiten des Elektrometers wurde durch Interpolation die Aufladezeit erhalten, die der bei jeder einzelnen Meßreihe tatsächlich auftretenden Primärspannung entsprach. Durch die Umrechnung dieser Aufladezeit auf die Kapazität der Apparatur und nach Subtraktion der erwähnten Streustrahlungskorrektur erhielt man die Voltaufladung unserer Apparatur bei Bestrahlung von einer Sekunde. Nach Multiplikation mit der Kapazität ergab sich die Ladungsmenge und nach Division durch  $e$  die Anzahl pro Sekunde wandernder Ionen. Diese Anzahl Ionen mußten ebenfalls wie bei der Schwankungsauswertung durch 555 dividiert werden, um die Anzahl Quanten zu erhalten. Somit ergab sich folgende Beziehung für die Intensität:

$$2 \cdot m \cdot t = 2 \cdot \left( v \cdot \left[ \frac{c - C}{c} \right] - S \right) \cdot e \cdot \frac{c \cdot t}{555 \cdot 300000}.$$

Hierbei bedeutet  $v$  die Aufladung des Elektrometers in einer Sekunde (in mV), wenn nur eine Kammer bestrahlt wurde

1) Näheres Fehlerdiskussion S. 483.

und der Glimmerkondensator hinzugeschaltet war,  $c$  die Kapazität der Apparatur,  $C$  die Kapazität des Glimmerkondensators,  $S$  die durch die Streustrahlung des Bleiparaffinschirms bewirkte Aufladung in einer Sekunde (in mV),  $e$  das elektrische Elementarquant und  $t$  das Zeitintervall, mit dem gearbeitet wurde.

Tabelle 1

Beispiel einer Meßreihe und ihrer Auswertung

I		II		III	IV
Messung		In mV		$\Delta_v$	$\Delta_v^2$
links	rechts	links	rechts		
3,0		120		123	15130
3,8		153		156	24340
	4,2		171	168	28220
	0,8		31	28	780
	1,3		51	48	2300
1,3		51		54	2920
4,0		162		165	27230
	1,8		70	67	4489
3,6		146		149	22200
	5,2		215	212	44940
	2,3		91	88	7740
0,6		23		226	680
6,5		268		271	73440
	1,5		58	55	3020
5,0		206		209	43680
	2,8		111	108	11660
	6,5		268	265	70230
2,0		79		82	6720
	3,3		134	131	17160
	1,5		58	55	3030
		1208	1258		409900

Differenz:

rechts 50

dividiert durch 20

rechts 3

dividiert durch 20

**20496**

In der Spalte I befinden sich die am Elektrometer abgelesenen Werte, in der Spalte II die aus der Empfindlichkeitskurve abgelesenen Beträge in mV. Das verwendete Element hatte eine Spannung von 1,453 Volt. Die Rückwanderungskorrektur ergab 0,019 Volt, so daß man gleichsam mit 1,472 Volt Gesamtspannung rechnen konnte.<sup>1)</sup> Die mittels Potentiometer

1) Vgl. S. 478.



erhältlichen Spannungen und die ihnen zugeordneten Ausschläge waren bei dieser Meßreihe:

Tabelle 2

mV . . . . .	736	490,7	368	184	147
Skalenteile . . . .	15,6 <sub>5</sub>	11,1 <sub>5</sub>	8,7	4,4 <sub>5</sub>	3,6 <sub>5</sub>

Als Mittelwert der Schwankungen in mV ergab sich: rechts 3 mV. Die Abweichungen von diesem Mittel sind in Spalte III und die Quadrate der Abweichungen in Spalte IV enthalten.

Der Mittelwert dieser Quadrate, das „mittlere absolute Schwankungsquadrat“ in mV betrug bei dieser Meßreihe:  $\Delta_v^2 = 20496$ , und die mittlere absolute Schwankung selbst  $\Delta_v = \sqrt{20496} = 143,1$ . Somit ergibt sich für die mittlere absolute Schwankung in Quanten:  $\Delta_n = 143,1 \cdot 152,8 = 21870$ .

Die durch Interpolation aus den Beobachtungen erhaltene Aufladung bei Verwendung des großen Glimmerkondensators ergab:  $v = 25,82$  mV/sec. Dann ist

$$2 \cdot m \cdot t = 2 \left( 25,82 \left[ \frac{12,15 + 90180}{12,15} \right] - S \right) \cdot \frac{12,15 \cdot 10 \cdot 10^{10}}{4,774 \cdot 555 \cdot 300000}$$

$$= 2 (25,82 \cdot 7423 - 11800) 1528 = 860000 \cdot 1528$$

$\sqrt{2} m t = 23450$ . Bei dieser Meßreihe ist die Differenz zwischen  $\Delta_n$  und  $\sqrt{2} m t = 1580 = 7$  Proz.

### Ergebnis

In der Art des eben gegebenen Beispiels wurden 120 Meßreihen von derselben Größe aufgenommen und ausgewertet. Infolge des großen Umfangs des Materials können nicht alle Meßreihen ebenso ausführlich gebracht werden, sondern es können nur die Teilergebnisse und Ergebnisse gebracht werden.

Die Intensität der Röntgenstrahlung ergab wiederholt bei aufeinanderfolgenden Meßreihen den gleichen Wert. Außerdem hatte sich die Empfindlichkeit des Elektrometers zwischen mehreren Meßreihen öfters nicht geändert. Diese beiden Tatsachen waren für die Auswertung der Messungen von großer Annehmlichkeit.

Tabelle 3

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
$N$	$v$	$V \cdot 10^3$	$\sqrt{2mt}$	$\sqrt{2mt} \cdot N$	mittl. $\Delta_v$	mittl. $\Delta_n$	$\Delta_n \cdot N$
12	26,75	374	23910	286920	18843	20960	251520
4	26,82	375	23940	95760	12363	16980	67920
2	26,62	372	23840	47680	16383	19680	39360
2	26,55	371	23800	47600	28736	25860	51720
7	26,22	366	23650	165550	19724	21430	150010
9	26,15	365	23620	212580	27022	25080	225720
7	25,74	359	23430	164010	19640	21400	149800
10	26,08	364	23580	235800	22444	22910	229100
8	25,95	362	23520	188160	19430	21280	170240
7	25,68	358	23400	163800	25630	24460	171220
22	25,82	360	23440	515680	20424	21820	480040
1	25,48	355	23300	23300	15166	18810	18810
16	26,01	363	23560	376960	24539	23910	382560
10	25,61	357	23360	233600	21396	22330	223300
3	25,55	356	23320	69960	18409	20710	62130

Spalte I gibt die Anzahl  $N$  der Meßreihen, die infolge gleicher Intensität einheitlich ausgewertet werden konnten. Spalte II enthält die Spannungen (in mV), auf die sich das Elektrometer auflud, wenn nur eine Kammer bestrahlt wurde, und der Glimmerkondensator hinzugeschaltet war,  $= v$ . In Spalte III sind die Werte der Spalte II umgerechnet auf die Apparaturkapazität und vermindert um den Streustrahlungsbetrag, also  $V = 2 \left( v \frac{c - C}{c} - S \right)$ . Spalte IV enthält  $\sqrt{2mt}$ , die Wurzel der aus  $V$  durch Umrechnung erhaltenen Anzahl Quanten die in dem Zeitintervall von 10 Sek. in beiden Kammern absorbiert werden  $= V \frac{c \cdot t}{e \cdot 555 \cdot 300000} = V \cdot 1528$ . Spalte VI gibt den Mittelwert der Schwankungsquadrate aus den Meßreihen gleicher Intensität. Spalte VII enthält die aus Spalte VI errechnete mittlere Schwankung in Quanten,  $= \Delta_n = \Delta_v^2 \cdot 152,8$ . Zur Ermittlung der Abweichung der beobachteten Schwankungen von den theoretisch erwarteten wurden in Spalte V und Spalte VIII die Werte von  $\sqrt{2mt}$  aus Spalte IV und von  $\Delta_n$  aus Spalte VII multipliziert mit der jeweiligen Anzahl  $N$  der gleich behandelten Meßreihen und die erhaltenen Werte addiert. Es zeigt sich dabei, daß bei dem Material von 2400 Beobachtungen die Abweichung zwischen  $\Delta_n$  und  $\sqrt{2mt}$  gleich 5,6 Proz. beträgt ( $2827360 - 2673450 = 153910$ ).

# Fehlerdiskussion

Die Unsicherheit bei der Verifikation der Gleichung  $\Delta_n = \sqrt{2 \cdot m \cdot t}$  liegt im wesentlichen in der Unsicherheit der Größe  $\varepsilon$ , der Energie (in Volt·Elektron), die das ionisierende Photoelektron verbraucht, um ein Ionenpaar zu bilden. Die bisherigen Bestimmungen sind in folgender Tabelle zusammengestellt.

Tabelle 4

Beobachter	Methode	kV-Bereich	Volt Ionenpaar	Fehler
Wilson <sup>1)</sup> . . . . .	Nebel- kammer	22	26	$\pm ?$
Meitner <sup>2)</sup> . . . . .		43	45	$\pm ?$
Johnson <sup>3)</sup> . . . . .		0,2	36	$\pm 9$
Lehmann <sup>4)</sup> . . . . .	Kathoden- strahlen	0,2 — 1	45	$\pm ?$
Schmitz <sup>5)</sup> . . . . .		1 — 9	45	$\pm ?$
Buchmann <sup>6)</sup> . . . . .		4 — 13	31	$\pm 3$
Eisl <sup>7)</sup> . . . . .		10 — 60	32,2	$\pm 0,5$
Kulenkampff <sup>8)</sup> . . . . .	Röntgen- strahlen	7 — 22	35	$\pm 5$
Rump <sup>9)</sup> . . . . .		28 — 100	33	$\pm 1,5$
Crowther u. Bond <sup>10)</sup> . . . . .		55	42,5	$\pm 0,4$
Steenbeck <sup>11)</sup> . . . . .		5 — 8	28	$\pm 6$
Gaertner <sup>12)</sup> . . . . .		8 — 10	36,4	$\pm 3$

Man sieht aus der Tabelle, daß die maximale Abweichung vom Mittelwert dieser Beobachtungen, 36 Volt/Ionenpaar, etwa 25 Proz. beträgt. Demgegenüber sind die anderen Fehler dieser Arbeit relativ gering.

1. Die Größe  $\Delta_n$  ist nur aus sehr vielen Einzelbeobachtungen mit einem gewissen Näherungswert zu erfassen, der im wesentlichen abhängt von der Zahl der Beobachtungen. Ist  $n$  die Anzahl der Beobachtungen in einer Meßreihe, aus der

- 1) C. T. R. Wilson, Proc. Roy. Soc. A. **104**, S. 1. 1922.
- 2) L. Meitner, Naturwissenschaften **14**, S. 1199. 1926.
- 3) J. B. Johnson, Phys. Rev. **10**, S. 609. 1917.
- 4) J. F. Lehmann, Proc. Roy. Soc. **115**, S. 609. 1927.
- 5) W. Schmitz, Phys. Ztschr. **29**, S. 846. 1928.
- 6) E. Buchmann, Ann. d. Phys. **87**, S. 509. 1928.
- 7) A. Eisl, Ann. d. Phys. [5] **3**, S. 277. 1929.
- 8) H. Kulenkampff, Ann. d. Phys. **79**, S. 97. 1926.
- 9) W. Rump, Ztschr. f. Phys. **43**, S. 254. 1927 u. **44**, S. 396. 1927.
- 10) I. A. Crowther u. W. V. Bond, Phil. Mag. **2**, S. 404. 1928.
- 11) M. Steenbeck, Ann. d. Phys. **87**, S. 811. 1928.
- 12) O. Gaertner, Ann. d. Phys. [5] **2**, S. 94. 1929.

das Schwankungsquadrat gebildet wird, so ist die Größe des mittleren Fehlers von  $\Delta_v^2$  gleich  $\frac{\sqrt{2} \cdot \Delta_e^2}{\sqrt{n}}$  und der prozentuale

Fehler demnach  $\mu_1 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} 100$ . Ist nun die Einzelbeobachtung selbst noch mit einem ins Gesicht fallenden Meßfehler behaftet, so ändert sich die vorhergehende in folgende Beziehung ab:  $\mu_1 = \sqrt{2 \cdot 100 + v}$ , wobei  $v$  der prozentuale mittlere Meßfehler ist. Dieser beträgt bei unseren Beobachtungen etwa 10 Proz., so daß sich näherungsweise bei einer Meßreihe als mittlerer Fehler ergibt:

$$\mu_1 = \frac{\sqrt{2 \cdot 100 + 10}}{\sqrt{20}} = 34 \text{ Proz.}$$

Da nun 120 solcher Meßreihen aufgenommen wurden, von denen jede einen mittleren Fehler von 34 Proz. hat, so ergibt sich für den mittleren Fehler von  $\Delta_v^2$ ,  $\mu_2 = \frac{\mu_1}{\sqrt{120}} = 3,1$  Proz. Der mittlere Fehler von  $n$  ist dann 1,5 Proz.

2. Da die Meßreihen aus äußeren Störungsgründen begrenzt waren, war der durch Mittelung gefundene Mittelwert nicht der exakte. (Denn je kürzer die Meßreihe, desto mehr paßt sich der Mittelwert der Schwankungskurve an.) Die Meßreihen konnten nicht aus mehr als 20 Werten gebildet werden. Der hierbei auftretende Fehler kann etwa 2 Proz. betragen.

3. Teilweise systematische Fehler bei der Eichung der Elektrometerkurven: Etwa 2 Proz.

4. Fehler aus Kapazitätsbestimmung, 10-Ohm-Instrument und Stöpselwiderstand, zusammen etwa 0,5 Proz.

5. Fehler aus folgender Ursache: Die beobachtete Ionisation wird nicht allein hervorgerufen durch Elektronen von der Energie der  $K$ -Molybdänstrahlung, sondern auch durch Photoelektronen anderer Energie. Diese können entstehen: a) durch nicht exakte Monochromatisierung; b) durch Photoelektronen, die in den die Kammern begrenzenden Aluminiumfolien ausgelöst werden und teilweise in die Kammern eintreten; c) durch Photoelektronen, die in den Kammern in der Nähe der Aluminiumfolien entstehen und somit nicht längs ihrer ganzen Bahn in den Kammernvolumen ionisieren können; d) durch Comptonelektronen. Letztere spielen bei der hier verwendeten,

verhältnismäßig weichen Strahlung eine so kleine Rolle, daß die dadurch entstehenden Fehler vernachlässigt werden können.

Vorausgesetzt, daß die kinetische Energie von Photoelektronen nahe bei der der Energie der Molybdänstrahlung liegt, wird selbst eine größere Intensität dieser Photoelektronen anderer Geschwindigkeit bei der Verifikation der Schwankungsgleichung nur einen geringen Fehler bewirken. Fehler durch Photoelektronen anderer Geschwindigkeit dürften wohl keinesfalls 3 Proz. übersteigen.

Wenn jetzt ungünstigerweise alle angeführten Fehler einfach addiert werden, so ergibt sich ein Gesamtfehler von 9 Proz.

### Gauss'sche Verteilung

Es wurde untersucht, ob die beobachteten Schwankungen dem Gauss'schen Verteilungsgesetz entsprachen. Deshalb

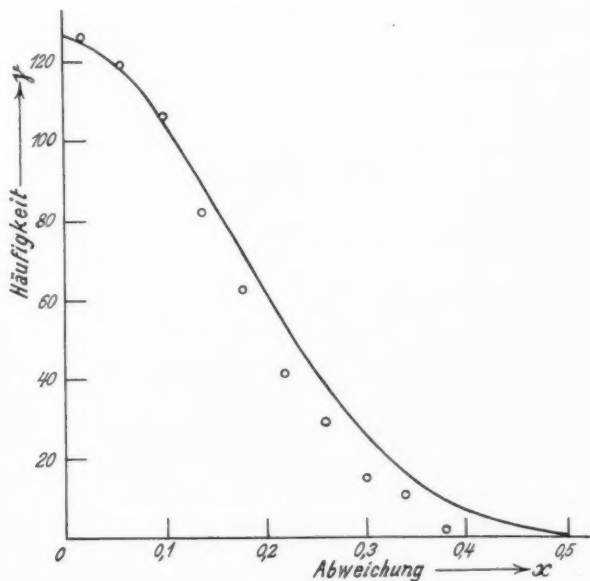


Fig. 4

wurde die Häufigkeit der auftretenden Abweichungen vom Mittelwert in Abhängigkeit von der Größe der Abweichungen

aufgetragen. Bei dem hier angeführten Material ergaben sich dabei die in der Figur eingezeichneten Werte. Die errechnete Gauss'sche Verteilung zeigt die ausgezogene Kurve. Man erkennt somit deutlich, daß die Schwankung mit guter Näherung dem Gauss'schen Fehlergesetz gehorcht. Eine kleine systematische Abweichung ist aber doch unverkennbar. Sie kommt möglicherweise dadurch zustande, daß die Ionisation nicht lediglich durch Photoelektronen von der der *K*-Molybdänstrahlung entsprechenden Energie entsteht, wie in der Fehlerdiskussion erwähnt wurde. Durch Photoelektronen geringerer Geschwindigkeit aber entsteht eine Verteilung, die einen etwas steileren Verlauf hat.

#### Schwankungsmethode

##### zur Bestimmung der Ionisationsenergie $\varepsilon = \text{Volt/Ionenpaar}$

Die relativ gute Übereinstimmung der erwarteten Schwankungen mit den beobachteten legt es nahe, die Schwankungsmethode weitgehend zu verbessern, da sie eine von den bisherigen gänzlich abweichende Methode zur Bestimmung der Energie Volt/Ionenpaar darstellt. Die Genauigkeit läßt sich außerordentlich steigern, wenn mit Strahlung gearbeitet wird, die durch Kristallreflexion monochromatisiert ist, und die Schwankungen wie beim Schottkyschen Schroteffekt verstärkt werden.

Rechnet man aus den angeführten Beobachtungen die Größe  $\varepsilon$  aus, so ergibt sich der Wert 41 Volt/Ionenpaar.

#### Zusammenfassung

1. Es wird eine sehr empfindliche Differentialmethode angegeben, um feine Intensitätsänderungen an Röntgenstrahlen nachweisen zu können. Sie benutzt eine Differentialschaltung zweier Ionisationskammern in Verbindung mit einem Faden-elektrometer.

2. Es wird gezeigt, daß die Empfindlichkeit der Methode gestattet, noch Intensitätsänderungen zwischen beiden Kammern von etwa  $\frac{1}{1000}$  Proz. der Gesamtintensität der in eine Kammer eintreffenden Strahlung zu erkennen.

3. Diese Grenze der Empfindlichkeit ergibt sich durch die statistischen Schwankungen der quantenhaften Absorption der Röntgenstrahlung. Diese werden dadurch als solche identifiziert,

daß gezeigt wird, daß die beobachteten Schwankungen in ihrer Größe übereinstimmen mit den aus der Intensität und der Quantgröße zu erwartenden statistischen Schwankung.

4. Es wird gezeigt, daß die Schwankungen dem Gaußschen Fehlergesetz gehorchen.

5. Es wird gezeigt, daß Schwankungsbeobachtungen eine gute Methode zur Bestimmung der Energie, die zur Bildung eines Ionenpaares nötig ist, ergeben können.

Hrn. Professor Dr. W. Nernst sind wir zu großem Dank verpflichtet für die Bereitwilligkeit, mit der er uns die erforderlichen Mittel des Instituts zur Verfügung stellte.

Hrn. Professor Dr. A. Wehnelt danken wir für sein warmes Interesse und für uns sehr wertvolle Literaturhinweise.

Hrn. Dr. Werner Ehrenberg danken wir für sein großes freundschaftliches Interesse, mit dem er oft zur Klärung der auftretenden Schwierigkeiten seine Zeit hergab.

Dem Kaiser-Wilhelm-Institut für Physik und dem Elektrophysik-Ausschuß der Notgemeinschaft d. D. W. sprechen wir hiermit unseren verbindlichsten Dank dafür aus, daß sie uns die erforderlichen Röntgenröhren zur Verfügung stellten.

Berlin, im November 1929, Physikal. Institut der Univers.

(Eingegangen 28. Dezember 1929)

---

**Über den Zusammenhang  
zwischen Intensität, Polarisation und Ablenkungs-  
winkel bei der Ramanstrahlung**

**Von G. I. Pokrowski und E. A. Gordon**

In dieser Mitteilung wird der Zusammenhang zwischen Intensität, Polarisation und Ablenkungswinkel bei der Ramanstrahlung in Wasser und Benzol experimentell untersucht. Dabei ergibt sich, daß in genannten Fällen das Licht nicht symmetrisch nach vorne und hinten zerstreut wird, sondern eine Erscheinung beobachtet werden kann, welche dem Mieeffekt ähnlich ist. Daraus kann der Schluß gezogen werden, daß die Ramanstrahlung nicht ganz inkohärent ist.

Falls ein Lichtstrom durch ein System aus sehr vielen streuenden Zentren von der Primärrichtung abgelenkt wird, kann eine allgemeine statistische Gesetzmäßigkeit festgestellt werden, welche als ein spezieller Fall des zweiten Satzes der Thermodynamik betrachtet werden kann. Der auffallende Lichtstrom kann in gewissem Maße inkohärent sein. Ist  $W_x$  die Wahrscheinlichkeit des Auftretens einer Phasendifferenz  $x$ , so kann im gegebenen Lichtstrom  $W_x$  als Funktion von  $x$  betrachtet werden für Strahlen, welche zwei gegebene Zerstreuungszentren treffen. Es kann nun die Änderung von  $|dW_x/dx|$  bei beliebiger Zerstreuung, Reflexion usw. betrachtet werden. Dabei kann behauptet werden, daß  $|dW_x/dx|$  bei allen möglichen Fällen sich immer verkleinern muß, was einer Verkleinerung der Kohärenz des Lichtes entspricht. Andererseits kann auch behauptet werden, daß, falls  $W_\alpha$  die Wahrscheinlichkeit des Auftretens eines polarisierten Quantes, dessen elektrischer bzw. magnetischer Vektor den Winkel  $\alpha$  mit einer gegebenen Richtung bildet,  $|dW_\alpha/d\alpha|$  bei jeder Art der Lichtstreuung sich verkleinern muß, das Licht also mehr oder weniger depolarisiert wird. Betrachten wir jetzt die Abhängigkeit der Intensität des



Lichtes  $J$  von dem Winkel  $\theta$ , den es mit einer gegebenen Geraden bildet. Je kleiner  $|dJ/d\theta|$  ist, desto weniger zerstreut ist der entsprechende Lichtstrom. Es kann auch behauptet werden, daß bei jeder Streuung  $|dJ/d\theta|$  sich verkleinern muß, falls man Lichtströme betrachtet, welche aus einer Volumeneinheit emittiert werden.

Alles Gesagte kann folgendermaßen formuliert werden. Bei jeder Lichtablenkung bestehen folgende Ungleichungen:

$$(1) \quad \frac{\partial \left| \frac{dJ}{d\theta} \right|}{\partial \left| \frac{dW_x}{dx} \right|} > 0$$

und

$$(2) \quad \frac{\partial \left| \frac{dJ}{d\theta} \right|}{\partial \left| \frac{dW_\alpha}{d\alpha} \right|} > 0.$$

Dabei kann  $|dJ/d\theta|$  von  $\infty$  bis zu einer bestimmten Größe sich verkleinern, welche durch die Eigenschaften der streuenden Zentren bedingt ist. Das gilt für einmalige Streuung. Bei mehrfacher Streuung wird schließlich  $|dJ/d\theta| = 0$  werden. Dann müssen auch  $|dW_x/dx|$  und  $|dW_\alpha/d\alpha|$  gleich Null werden, das Licht wird schließlich vollständig diffus und depolarisiert werden. Ganz analog muß schließlich jede geordnete Bewegung in einem geschlossenen System in vollständig ungeordnete Molekularbewegung übergehen. Bei der molekularen Lichtzerstreuung muß die Intensität des gestreuten Lichtes der bekannten Formel von Rayleigh folgen:

$$(3) \quad J = J_0(1 + \cos^2 \theta)$$

wo  $J_0$  die Intensität bedeutet, welche  $\theta = 90^\circ$  entspricht. Nach dieser Formel muß das Licht symmetrisch in bezug auf die Einfallsrichtung nach vorne und hinten zerstreut werden. Für die Winkel  $\theta$  und  $\pi - \theta$  müssen somit die Intensitäten einander gleich sein. Das ist aber nur dann gültig, wenn das zerstreute Licht vollständig inkohärent ist und man keine Interferenzerscheinungen erwarten kann. Wird nun das Licht nicht symmetrisch nach vorne und hinten zerstreut, so bestehen folgende zwei Möglichkeiten. Entweder strahlen die einzelnen Zentren nicht nach der Formel (3), oder das gestreute Licht

ist nicht ganz inkohärent. In Fällen, wo man ganz sicher sein kann, daß die lichtzerstreuenden Zentren Moleküle sind, besteht nur die zweite Möglichkeit. Somit kann das Verhältnis der Intensitäten

$$\frac{J_{\theta}}{J_{\pi - \theta}} = K_{\theta}; \quad (\theta = \text{const}),$$

des unter den Winkeln  $\theta$  bzw.  $\pi - \theta$  gestreuten Lichtes im letztgenannten Falle als ein Maß der Kohärenzfähigkeit dieses Lichtes betrachtet werden. Je stärker also diese Kohärenzfähigkeit gestört ist, desto gleichmäßiger nach allen Richtungen verteilt sich der Lichtstrom.<sup>1)</sup> Insbesondere ist es interessant, diese Ideen in solchen Fällen anzuwenden, wo man sicher mit einer Molekularstrahlung zu tun hat. In solcher Weise wurde von einem von uns die Zerstreuung von Licht in der Atmosphäre untersucht.<sup>2)</sup> Doch kann man nicht sicher sein, inwieweit hier die Formel (3) angewendet werden kann. Einen viel einfacheren Fall bildet die Ramanstrahlung, insofern man hier sicher mit einem Molekulareffekte zu tun hat. Man könnte also vorläufig annehmen, daß jedes Molekül in diesem Falle symmetrisch nach vorne und hinten strahlt und

$$K_{\theta} = 1$$

sein müßte, falls das zerstreute Licht inkohärent ist. Zur Klärung dieser Frage wurden umfangreiche Experimente angestellt.

Es wurde die Ramanstrahlung von Wasser und Benzol nach folgenden zwei Methoden untersucht. Erstens wurde das zerstreute Licht mit einem großen Quarzspektrograph von Fuess photographiert und die photographierten Spektren mit einem Mikrophotometer ausgemessen. Dabei wurde diejenige Ramanbande des Wassers und Benzols untersucht, welche dem Absorptionsmaximum für Wasser bei  $\lambda = 3 \mu$ , und für Benzol bei  $\lambda = 3,2 \mu$  entspricht. Zweitens wurde das zerstreute Licht mit einem modifizierten Weberschen Photometer direkt ge-

1) Es ist interessant zu bemerken, daß die ersten Spuren einer solchen Idee schon bei dem arabischen Gelehrten Ibn-al-Haitam (965—1039) in seiner Abhandlung „Über die Natur der Flecken, welche man auf der Oberfläche des Mondes sieht“ vorkommen.

2) G. I. Pokrowski, Phys. Ztschr. 30. S. 697. 1929.

messen, indem die einfallenden und gestreuten Strahlen durch zwei nahezu komplementäre Lichtfilter hindurchgelassen wurden. Bei Wasser und bei Benzol ergaben die beiden Methoden gleiches, was die folgende Tab. 1 zeigt, wo Werte von  $K_\theta$  zusammengestellt sind nebst den entsprechenden mittleren quadratischen Fehlern.

Tabelle 1

	Wasser	Benzol		
$K_\theta$	$2,7 \pm 0,2$	$3,3 \pm 0,5$	Photographisch	} $\theta = 20^\circ$
$K_\theta$	$3,0 \pm 0,2$	$3,1 \pm 0,3$	Photometrisch	

Die vorgeführten Zahlen zeigen, daß die Erscheinung sehr weit von demjenigen ist, was man im Falle einer Molekularstreuung erwarten könnte. Das führt zum Schluß, daß die *Ramanstrahlung zum Teile kohärent ist*, oder daß in diesem Falle die Moleküle selbst das Licht nicht symmetrisch nach vorne und hinten strahlen.<sup>1)</sup> Es scheint, daß die erste Möglichkeit die wahrscheinlichere sei. Bei den beschriebenen Experimenten wurde als Lichtquelle eine Quarzquecksilberlampe gebraucht. Aus dem Quecksilberspektrum wurde die Linie  $\lambda = 3650 \text{ \AA}$  durch ein entsprechendes Filter isoliert. Die streuende Flüssigkeit befand sich in einem sphärischen Glasgefäße. Die Lampe war so aufgestellt, daß die in das Gefäß einfallenden Strahlen nach der Brechung nahezu parallel gerichtet waren. Um eine mögliche Unsymmetrie der Apparatur bezüglich der Lichtstreuung zu finden, wurde die Zerstreuung des Lichtes in einer schwachen Fluoreszenzlösung untersucht. Hier ist das emittierte Fluoreszenzlicht sicher inkohärent und man hat gewiß mit einer Molekularerscheinung zu tun. Somit muß hier  $K_\theta = 1$  sein. Es ergab sich tatsächlich, daß innerhalb der Fehlergrenzen  $K_\theta$  der genannten Beziehung genügt. Somit kann die Ursache der großen Werte von  $K$  für Ramanstrahlung der Apparatur nicht zugeschrieben werden. Zum Schluß ist es auch nicht ohne Interesse, die bei der Arbeit er-

1) Ein Compton-Effekt kann hier keinen Platz haben, da die Masse des Elektrons sehr groß in Vergleich mit der Masse des Lichtquanten und die Energie, welche der ultraroten Absorptionsbande entspricht, zu groß im Vergleich mit der gesamten Energie des Quanten ist.

haltenen Werte von  $J_\theta$  und der Polarisation  $P$  des Ramanlichtes für Wasser und Benzol als Funktion von  $\theta$  zusammenzustellen. Es muß dabei hervorgehoben werden, daß  $P$  photographisch mit Hilfe des Spektrographen, vor dessen Spalte ein Nicol aufgestellt war, ermittelt wurde. — Der Wert von  $P$  bei  $\theta = 90^\circ$  wurde mit besonderer Sorgfalt gemessen. Es wurde auch eine entsprechende Korrektur des Wertes  $P$  ausgeführt, um die Polarisation des Lichtes im Spektrographen auszuschalten. Für  $J_\theta$  sind photometrische und photographische Ergebnisse kombiniert worden.

Tabelle 2

$\theta =$	$20^\circ$	$40^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$120^\circ$	$140^\circ$	$160^\circ$	
$J_\theta =$	2,0	1,9	1,3	1,0	0,7	0,7	0,7	Wasser
$P_\theta =$	0,07	—	—	$0,70 \pm 0,02$	—	—	0,07	
$J_\theta =$	—	1,6	1,3	1,0	0,8	0,6	—	Benzol

Tab. 2 zeigt, daß die Unsymmetrie der Zerstreuung bei allen Werten von  $\theta$  festgestellt werden kann und einen ganz bestimmten, gesetzmäßigen Charakter hat, was nicht durch Fehlerursachen vorgetäuscht werden konnte.

Zum Schluß sagen wir auch an dieser Stelle Hrn. Prof. N. E. Uspenski unsern tiefsten Dank für die Unterstützung der hier beschriebenen Experimente.

Moskau, Physikalisches Institut der Technischen Hochschule, Dezember 1929.

(Eingegangen 30. Dezember 1929)

## ***Über Normalmaterialien für Ausdehnungsmessungen an festen Körpern bis zu 1400°C***

***Von Willi M. Cohn***

(Mit 4 Figuren)

Inhaltsangabe. Zunächst wird eine Übersicht über die Ergebnisse früherer Messungen an verschiedenen Materialien gegeben, welche als Normalmaterialien für Ausdehnungsmessungen an festen Körpern nach der Vergleichsmethode Verwendung finden können. Dann wird über Untersuchungen berichtet, welche mit Hilfe neuer, hier kurz beschriebener Apparaturen durchgeführt wurden und welche die Eignung verschiedener Substanzen zur Verwendung als Normalmaterialien für Ausdehnungsmessungen bis zu 1400°C festzustellen bezweckten. — Untersucht wurden Kieselglas, Zirkondioxyd, sowie verschiedene keramische Materialien. Es zeigte sich, daß Kieselglas und Zirkondioxyd bis zu 1000°C etwa Verwendung finden können, neuartige Steinzeugmassen bis zu Temperaturen von etwa 1200°C und feuerfeste Marquardtsche Masse bis zu 1400°C. — Schließlich wird auf eine neue Apparatur hingewiesen, welche auf Grund dieser Ergebnisse entwickelt worden ist.

### **I. Einleitung**

Ausdehnungsmessungen an festen Körpern werden entweder derart vorgenommen, daß die Verlängerung des zu untersuchenden Materials mit wachsender Temperatur direkt beobachtet wird, oder in der Weise, daß das Ausdehnungsverhalten des Probekörpers mit dem eines Normal- oder Standardmaterials verglichen wird, dessen Ausdehnungsverhalten in Abhängigkeit von der Temperatur bekannt ist. Während die direkte Methode nur verhältnismäßig selten angewandt wird — in der Hauptsache für Präzisionsmessungen und als Grundlage für Untersuchungen nach der Vergleichsmethode —, findet das Vergleichsverfahren in großem Umfang in Wissenschaft und Technik Verwendung, da die Messungen bei verhältnismäßig großer Genauigkeit in bedeutend einfacherer Weise durchgeführt werden können als bei der erstgenannten Methode. —

Endlich kann die Ausdehnung fester Körper noch mit Hilfe röntgenographischer Verfahren untersucht werden, doch können derartige Bestimmungen ebenfalls nur verhältnismäßig selten Anwendung finden.

Die Vornahme von Ausdehnungsmessungen nach der Vergleichsmethode an beliebigen Materialien und unter beliebigen Erhitzungsbedingungen war bisher dadurch auf Temperaturen von weniger als  $1000^{\circ}\text{C}$  beschränkt, daß kein Material von genügender Homogenität und gleichbleibender Zusammensetzung bekannt war, welches allgemein auch für höhere Temperaturen als Vergleichssubstanz in Betracht zu kommen schien; für Untersuchungen bis zu  $900^{\circ}$  — maximal  $1000^{\circ}\text{C}$  — wurde zu meist Kieselglas (Quarzglas bzw. Quarzgut), vereinzelt wurden auch Legierungen, wie „Baros“, „Pyros“ u. dgl. verwendet. — Gleiche Gesichtspunkte gelten, wenn man beispielsweise beabsichtigt, die Ausdehnung kleiner Kristalle bis zu hohen Temperaturen zu verfolgen, welche schon infolge ihrer geringen Größe die Anwendung einer direkten Methode ausschließen.

Das Ziel der vorliegenden Untersuchung war nun festzustellen, ob heute Substanzen zur Verfügung stehen, welche allgemein als Normalmaterialien für Ausdehnungsmessungen nach der Vergleichsmethode bis zu höheren Temperaturen als bisher Verwendung finden können. Mit Rücksicht auf die Temperaturgrenzen der heute in der Technik verwendeten Öfen und im Hinblick auf die verhältnismäßig einfache Untersuchungsmöglichkeit (Öfen mit Platinwicklung) wurde bei den Messungen eine obere Temperatur von  $1400^{\circ}\text{C}$  eingehalten.

Im folgenden werde ich zunächst eine kurze Übersicht über die bisher bekanntgewordenen Untersuchungen geben, welche zur Aufstellung von Normalmaterialien für Ausdehnungsmessungen geführt haben, dann über die von mir benutzten Versuchsanordnungen und über die Ergebnisse meiner Messungen an einigen Substanzen berichten.

## II. Bisherige Untersuchungen zur Ermittlung von Normalmaterialien

### a) Kieselglas

In zahlreichen Untersuchungen ist das Ausdehnungsverhalten von Kieselglas im Temperaturgebiet  $0-1000^{\circ}\text{C}$  studiert worden. Zunächst sind die Arbeiten zu nennen, welche nach

der direkten Methode (Komparator) bzw. nach dem Fizeau-schen Verfahren in der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt durchgeführt worden sind, so die Untersuchungen von Holborn und Henning<sup>1)</sup>, Scheel<sup>2)</sup> und Scheel und Heuse<sup>3)</sup>; die Ergebnisse der Messungen sind in den von Holborn, Scheel und Henning herausgegebenen Wärmetabellen<sup>4)</sup> zusammengefaßt. Weiterhin sind die im Bureau of Standards durchgeführten Untersuchungen von Souder und Hidnert<sup>5)</sup> zu nennen, ferner die Arbeiten von Randall<sup>6)</sup>, Donaldson<sup>7)</sup>, Callendar<sup>8)</sup>, Harlow<sup>9)</sup> und Le Chatelier<sup>10)</sup>. — Zusammenfassende Übersichten finden sich im Landolt-Börnstein<sup>11)</sup>, den International Critical Tables<sup>12)</sup>, sowie den Arbeiten von Souder und Hidnert<sup>5)</sup> und Harlow<sup>13)</sup>, vgl. auch W. M. Cohn.<sup>14)</sup>

#### b) Metalle

Einfacher als die Untersuchung von Kieselglas gestaltet sich die von Metallen: Das Metall wird zumeist durch direkte Widerstandserhitzung erwärmt und seine Längenänderung in Abhängigkeit von der Temperatur mit Hilfe von Meßmarken und Mikroskopen oder in ähnlicher Weise ermittelt. Von der großen Zahl der vorliegenden Bestimmungen sei hier nur auf einige Untersuchungen hingewiesen, bei denen die Ausdehnung bis in die Nähe der Schmelzpunkte der Substanzen verfolgt

1) L. Holborn und F. Henning, *Ann. Phys.* **10**. S. 446. 1903.

2) K. Scheel, *Verh. D. Phys. Ges.* **5**. S. 119. 1903.

3) K. Scheel und W. Heuse, *Verh. D. Phys. Ges.* **16**. S. 1. 1914.

4) L. Holborn, K. Scheel, F. Henning, *Wärmetabellen der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt*, Vieweg, Braunschweig 1919.

5) W. Souder and P. Hidnert, *Sc. Papers Bur. Stand.* **21**. S. 1. 1926. (Nr. 524).

6) H. M. Randall, *Phys. Rev.* **30**. S. 216. 1910.

7) H. Donaldson, *Proc. Phys. Soc. London* **24**. S. 186. 1912.

8) H. L. Callendar, *Proc. Phys. Soc. London* **24**. S. 195. 1912.

9) F. J. Harlow, *Proc. Phys. Soc. London* **26**. S. 85. 1913/14.

10) H. Le Chatelier, *La silice et les silicates*. Paris 1914.

11) Landolt - Börnstein, *Physikalisch - Chemische Tabellen*. Springer, Berlin, 1923., V. Auflage.

12) *International Critical Tables*. McGraw-Hill Book Co. New York 1927 u. f.

13) F. J. Harlow, *Phil. Mag.* **7**. S. 674. 1929.

14) Willi M. Cohn, *Ber. d. Deutschen Keramischen Ges.* **9**. S. 239. 1928.

wurde: So untersuchten Holborn und Valentiner<sup>1)</sup> Platin und Platin-Iridium bis zu Temperaturen von 1600°C, Worthing<sup>2)</sup> studierte in mehreren Arbeiten das Ausdehnungsverhalten von Wolfram, Molybdän und Tantal bis zu 2700 bzw. 2500 bzw. 2800°K; Day und Sosman<sup>3)</sup> ermittelten mit Hilfe des Komparators und indirekter Heizung die Ausdehnungswerte von Platin-Rhodium und Platin-Iridium bis zu mehr als 1300°C.

Die untersuchten Metalle zeigen jedoch einige Nachteile, welche ihre Verwendung als Normalmaterialien bei Temperaturen von mehr als 1000°C stark beeinträchtigen; Wolfram und Molybdän erfordern eine Erhitzung in reduzierender oder neutraler Atmosphäre, Platin zeigt eine geringe Festigkeit bei Temperaturen von mehr als 1000°C; außerdem dürfte seine allgemeine Verwendung für Ausdehnungsmessungen an dem hohen Preis des Materials scheitern — ein Gesichtspunkt, welcher auch die Verwendung von Platin-Iridium bzw. Platin-Rhodium in größerem Maßstab ausschließt, obwohl die Festigkeit der beiden letztgenannten Materialien bedeutend gegenüber reinem Platin erhöht ist. (Die Verwendung von reinem Iridium ist wegen der Verdampfung des Materials bei hoher Temperatur und der Möglichkeit der Infizierung der Thermo-elemente usw. aus Platin ebenfalls meist nicht möglich — vgl. W.M.Cohn.<sup>4)</sup>) — Fernerhin ergeben sich bei allen Metallen sehr erhebliche Ausdehnungsbeträge mit zunehmender Temperatur, welche wohl ihre Verwendung als Normalmaterialien für Messungen an anderen Metallen usw. möglich erscheinen lassen, bei anderen Substanzen jedoch versagen.

### III. Apparaturen

Die Vornahme meiner Ausdehnungsmessungen geschah sowohl nach der direkten, als auch nach der Vergleichsmethode. Während bei der erstgenannten Methode Temperaturen bis

---

1) L. Holborn u. S. Valentiner, *Ann. d. Phys.* **22**. S. 1—48. 1907.

2) A. G. Worthing, *Journ. Franklin-Inst.* **181**. S. 857. 1916; *Phys. Rev.* **10**. S. 638. 1917; *Phys. Rev.* **28**. S. 1910. 1926.

3) A. L. Day and R. B. Sosman, *Amer. Journ. Sci.* **29**. S. 93. 1910; *Publ. Carnegie Inst.* **157**. 1911.

4) Willi M. Cohn, *Metallwirtsch.* **8**. S. 367. 599. 623. 1929.



zu 1400°C erreicht werden konnten, war die Vergleichsmethode zunächst — unter Verwendung von Kieselglas als Normalmaterial — nur bis zu 900°C anwendbar.

Für die direkten Messungen wurde ein *Komparator* benutzt, welcher mit feststehenden Mikroskopen und Okularschraubenmikrometern ausgerüstet und mit einem platindrahtbewickelten Ofen verbunden war; die Genauigkeit der Längenmessungen betrug  $\pm 0,05$  Proz., die der Temperaturmessungen  $\pm 0,1$  Proz. für die maximal erreichbaren Temperaturen. Eingehendere Angaben über den Komparator und die Durchführung der Messungen mit ihm finden sich in meinen Veröffentlichungen<sup>1), 2)</sup>.

Die Vornahme der Ausdehnungsmessungen nach der Vergleichsmethode geschah mit Hilfe einer Apparatur aus Kieselglas, welche mit einer neuentwickelten *Selbstregistriereinrichtung* verbunden war. Die hier erzielte Genauigkeit der Messungen betrug  $\pm 0,5$  Proz. Bezüglich näherer Angaben sei auf meine Veröffentlichungen<sup>2), 3)</sup> verwiesen.

#### IV. Neue Untersuchungen zur Ermittlung von Normalmaterialien

Im Hinblick auf die obenerwähnten Nachteile bei Verwendung von Metallen als Normalmaterialien für Ausdehnungsmessungen bis zu mehr als 1000°C wurden meine Untersuchungen in der Richtung geführt, Substanzen zu finden, welche eine nicht zu starke Ausdehnung bei der Erhitzung bis zu hohen Temperaturen aufweisen; weitere *Vorbedingungen* waren, daß die Materialien immer in gleicher Beschaffenheit geliefert werden können, daß im Laufe der Erhitzung — auch bei Temperaturen zwischen 0 und 1000°C — keine beträchtlichen Unstetigkeiten in den Ausdehnungs-Temperatur-Kurven auftreten, daß die Ausdehnung reversibel verläuft und daß insbesondere keine bleibenden Längenänderungen bei wiederholter Erhitzung und Abkühlung erfolgen. — Zunächst wurde das

1) Willi M. Cohn, erscheint in Ztschr. f. Instr.-Kde. 1930.

2) Willi M. Cohn, Ausdehnungsmessungen an festen Körpern bis zu Temperaturen von 1400°C. Das Ausdehnungsverhalten von Zirkondioxyd in Abhängigkeit von der Aufbereitung. (Erscheint demnächst.)

3) Willi M. Cohn, Z. techn. Phys. 10. S. 103. 1929.

Ausdehnungsverhalten von Kieselglas bis zu Temperaturen von mehr als 1000°C untersucht.

a) Kieselglas

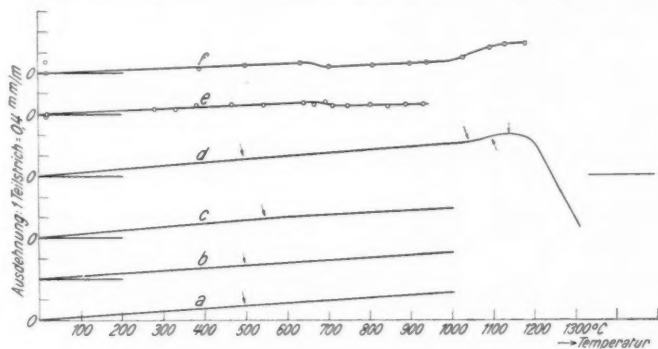
Bereits oben ist auf die zahlreichen Untersuchungen des Ausdehnungsverhaltens von Kieselglas hingewiesen worden. Wenn ich hier einige Ergebnisse meiner Untersuchungen mitteile, so geschieht dieses nur, weil ich annehme, daß einige hierbei gefundene Gesichtspunkte ein allgemeineres Interesse beanspruchen dürften. — Bei allen mitgeteilten Untersuchungen (mit Ausnahme von Kurve *d* der Fig. 1) wurden von jedem Material mindestens zwei Probestäbe in je vier Meßreihen in verschiedenen Temperaturintervallen geprüft.

Es sei hier das Ausdehnungsverhalten von zwei Kieselglasmaterialien besprochen: (durchsichtigem) „Quarzglas“ und (blasenhaltigem) „Quarzgut“; nach Angaben der Lieferfirma waren diese Substanzen aus reinem geschmolzenen Bergkristall bzw. reinem geschmolzenen Quarzsand in ähnlicher Weise hergestellt, wie bei Souder und Hidnert<sup>1)</sup> angegeben. Eine weitere thermische Behandlung wurde bei den Proben, deren Untersuchungsergebnisse hier mitgeteilt werden, von mir nicht vorgenommen. — Für die Messungen nach der direkten Methode gelangten Probestäbe von 220 mm Länge und 10 mm Durchmesser zur Anwendung, welche eine Längsbohrung besitzen und an den Enden bis auf die neutrale Achse abgeschliffen und mit Strichmarken versehen sind. — Für die Messungen nach der Vergleichsmethode wurden Stäbe von 52 bzw. 102 mm Länge und 10 mm Durchmesser verwendet, welche an den Enden Bohrungen von 2 mm Durchmesser in Richtung ihrer Achse erhielten.

Die Kurven „a“ und „b“ der Fig. 1 geben die Ergebnisse für Quarzglas und -gut wieder, welche die nach den beiden Methoden gefundenen Ausdehnungswerte im Temperaturintervall 0—1000°C umfassen; als Ordinate ist die Verlängerung der Materialien in Millimetern für 1 m Stablänge eingetragen, als Abscisse die Temperatur (deutlichkeitshalber sind die Ausgangspunkte der Kurven in der Ordinate gegeneinander ver-

1) Vgl. Fußnote 5, S. 495.

schoben gezeichnet). Beide Substanzen zeigen zunächst einen gleichförmigen Anstieg der Ausdehnung mit zunehmender Temperatur, bei etwa 500°C erfolgt eine geringe Richtungsänderung in den Kurven, dann geradliniger weiterer Anstieg bis zu 1000°C. — Die Tabellen 1 und 2 bringen Zahlenwerte für die Verlängerung  $\Delta l$  beider Materialien in mm/m; hierbei sind die Temperaturintervalle 20—200 und 0—1000°C getrennt aufgeführt. In den Tabellen 3 und 4 sind die aus  $\Delta l$  be-



Ausdehnungsverhalten von Kieselglas

$a$  = Quarzglas,  $b$  = Quarzgut,  $c$  = Quarzglas nach den Wärmetabellen,  $d$  = Quarzglas bis zur beginnenden Erweichung,  $e$  und  $f$  = schlecht gekühltes Quarzglas bzw. -glas: Q XVI bzw. Q VI

Fig. 1

rechneten mittleren linearen Ausdehnungskoeffizienten  $\beta$  für beide Materialien in den gleichen Temperaturintervallen enthalten. Entsprechend dem Verlauf der Kurven zeigt sich bis zu etwa 500°C eine Zunahme, dann eine Abnahme der mittleren linearen Ausdehnungskoeffizienten. — Zu bemerken ist, daß die Ausdehnung beider Substanzen bei Erhitzung und Abkühlung reversibel verläuft und daß nach der Abkühlung keine bleibenden Längenänderungen beobachtet werden.

Wie aus den Kurven  $a$  und  $b$ , sowie aus den Tabb. 1—4 zu ersehen ist, ergeben sich bei Quarzglas im allgemeinen etwas geringere Ausdehnungswerte als bei Quarzglas — ein Befund, der mit den Angaben von Souder und Hidnert<sup>1)</sup> für Tempe-

1) Vgl. Fußnote 5, S. 495.

Tabelle 1

Verlängerung  $\Delta l$  in Millimetern für 1 m Stablänge bei Erwärmung von 20°C auf die folgenden Temperaturen:

Material	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200°C
Quarzglas	0	0,013	0,025	0,035	0,047	0,059	0,071	0,083	0,095	0,107
Quarzgut	0	0,012	0,024	0,032	0,044	0,060	0,068	0,080	0,092	0,104
Quarzglas nach den Wärmetabellen (interpoliert)	0	0,010	0,020	0,031	0,042	0,054	0,067	0,082	0,094	0,107
Zirkondioxyd, bei 1800°C kurzzeitig gebrannt	0	0,164	0,312	0,468	0,624	0,780	0,932	1,096	1,252	1,408
Neuartige Steinzeugmasse	0	0	0	0	0,002	0,010	0,022	0,046	0,078	0,114
Marquardtsche Masse	0	0,082	0,164	0,246	0,328	0,412	0,494	0,574	0,658	0,738

Tabelle 2

Verlängerung  $\Delta l$  in Millimetern für 1 m Stablänge bei Erwärmung von 0°C auf die folgenden Temperaturen:

Material	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000	1100	1200	1300	1400°C
Quarzglas	0	0,058	0,117	0,176	0,235	0,299	0,361	0,417	0,474	0,528	0,583	—	—	—	—
Quarzgut	0	0,052	0,112	0,180	0,244	0,308	0,360	0,404	0,436	0,476	0,515	—	—	—	—
Quarzglas nach den Wärmetabellen	0	0,051	0,117	0,188	0,254	0,306	0,36	0,40	0,45	0,50	0,54	—	—	—	—
Zirkondioxyd, bei 1800°C kurzzeitig gebrannt	0	0,780	1,556	2,396	3,276	4,144	5,004	5,872	6,732	7,596	8,508	—	—	—	—
Neuartige Steinzeugmasse	0	—	0,006	0,106	0,308	0,544	0,784	1,022	1,266	1,552	1,848	2,148	2,448	2,748	—
Marquardtsche Masse	0	0,408	0,828	1,284	1,812	2,348	2,856	3,392	3,908	4,584	5,260	5,936	6,596	7,272	7,940

Tabelle 3

Mittlere lineare Ausdehnungskoeffizienten  $\beta \cdot 10^{-6}$  bei Erwärmung von 20°C auf die folgenden Temperaturen:

Material	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200°C
Quarzglas . . . . .	0	0,65	0,63	0,58	0,59	0,59	0,60	0,60	0,60	0,60
Quarzgut . . . . .	0	0,60	0,60	0,53	0,55	0,60	0,57	0,57	0,57	0,58
Quarzglas nach den Wärmetabellen (interpoliert) . . . . .	0	0,50	0,50	0,52	0,53	0,54	0,56	0,59	0,59	0,60
Zirkondioxyd, bei 1800°C kurzzeitig gebrannt	0	8,20	7,80	7,80	7,80	7,80	7,77	7,82	7,82	7,82
Neuartige Steinzeugmasse . . . . .	0	0	0	0	0,03	0,10	0,18	0,33	0,49	0,63
Marquardt'sche Masse . . . . .	0	4,10	4,10	4,10	4,10	4,12	4,12	4,12	4,12	4,10

Tabelle 4

Mittlere lineare Ausdehnungskoeffizienten  $\beta \cdot 10^{-6}$  bei Erwärmung von 0°C auf die folgenden Temperaturen:

Material	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000	1100	1200	1300	1400°C
Quarzglas . . . . .	0	0,58	0,58	0,59	0,59	0,60	0,60	0,59	0,59	0,59	0,58	—	—	—	—
Quarzgut . . . . .	0	0,52	0,56	0,60	0,61	0,62	0,60	0,58	0,55	0,53	0,52	—	—	—	—
Quarzglas nach den Wärmetabellen	0	0,51	0,59	0,63	0,63	0,61	0,60	0,57	0,56	0,56	0,54	—	—	—	—
Zirkondioxyd, bei 1800°C kurzzeitig gebrannt . . . . .	0	7,80	7,78	7,99	8,19	8,29	8,34	8,39	8,42	8,66	8,81	—	—	—	—
Neuartige Steinzeugmasse . . . . .	0	—	0,06	0,53	1,03	1,36	1,57	1,70	1,81	1,94	2,05	2,15	2,23	2,29	—
Marquardt'sche Masse . . . . .	0	4,08	4,14	4,28	4,53	4,70	4,76	4,85	4,89	5,09	5,26	5,40	5,50	5,59	5,66

raturen bis zu  $1000^{\circ}\text{C}$  übereinstimmt (nur in einigen Fällen ergab sich bei den Messungen der genannten Autoren das umgekehrte Verhältnis bei Temperaturen unterhalb  $300^{\circ}\text{C}$ ). — Weiterhin zeigt es sich, daß die erhaltenen Ergebnisse nur geringe Abweichungen von den Werten der Wärmetabellen der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt<sup>1)</sup> aufweisen, welche in Fig. 1 als Kurve *c* eingezeichnet und auch in den Tabbl. 1–4 angeführt sind. Kurve *c* zeigt ebenfalls eine Richtungsänderung (bei etwa  $550^{\circ}\text{C}$ ) und in den Werten der mittleren linearen Ausdehnungskoeffizienten findet sich entsprechend — allerdings nur bis zu  $400^{\circ}\text{C}$  — zunächst ein Anstieg, dann ein Abfall. Auch Souder und Hidnert<sup>2)</sup> finden einen entsprechenden Kurvenverlauf, der als „konkav nach der Abszisse zu“ bezeichnet wird.

Wird die Erhitzung von Kieselglas bis zu höheren Temperaturen als  $1000^{\circ}\text{C}$  geführt, so ergibt sich folgendes (aus den später angeführten Gründen wurden diese Messungen zum Teil mit Hilfe einer weiter unten erwähnten neuen Methode für Ausdehnungsmessungen nach der Vergleichsmethode bis zu  $1400^{\circ}\text{C}$  durchgeführt): Wie aus Kurve *d* der Fig. 1 ersichtlich ist (Quarzglas), zeigt sich bis zu  $1050^{\circ}\text{C}$  weiterer geradliniger Kurvenanstieg wie bei den Kurven *a* bis *c*; dann beginnt bei dieser Temperatur (genaue Lage durch Extrapolation der anschließenden Kurventeile bestimmt) eine allmählich stärker zunehmende Verlängerung der Probekörper mit wachsender Temperatur als bisher, bei etwa  $1100^{\circ}\text{C}$  wird ein Wendepunkt in der Kurve erreicht; nunmehr erfolgt verminderter Kurvenanstieg, schließlich wird eine Stelle horizontaler Tangente bei  $1145^{\circ}\text{C}$  erhalten; dann setzt eine Kontraktion ein, welche zunächst allmählich, dann jedoch immer steiler verläuft und die bis zu mehr als  $1300^{\circ}\text{C}$  verfolgt werden konnte. (Diese Kontraktion ist so erheblich, daß sie mit dem Komparator nicht mehr beobachtet werden konnte.) — Ist einmal bei der Erhitzung die Temperatur von  $1050^{\circ}\text{C}$  überschritten, so ist es nicht möglich, bei der Abkühlung der Materialien den gleichen Kurvenverlauf zu erhalten wie bei der Erhitzung; nach der Abkühlung zeigt sich eine bleibende Verkürzung der Substanzen gegenüber ihrer Ausgangslänge.

1) Vgl. Fußnote 4, S. 495.

2) Vgl. Fußnote 5, S. 495.

Kurve *d* zeigt ein interessantes Ergebnis insofern, als sie eine große Ähnlichkeit mit den Ausdehnungs-Temperatur-Kurven der üblichen Gläser aufweist; der Unterschied besteht vor allem darin, daß die Temperaturen erheblich höher liegen als dort beobachtet; vgl. beispielsweise meine Untersuchungen.<sup>1)</sup>

Auch bei Kieselglas ist somit das Auftreten verschiedener „charakteristischer Punkte“ zu beobachten: so würde die Richtungsänderung im Kurvenverlauf bei 500° C einem „Aufspalt-punkt“ entsprechen, bei 1050° C wäre der „Transformations-punkt“, bei 1145° C der „Erweichungspunkt“ anzusetzen, der zwischen beiden beobachtete Wendepunkt wäre vielleicht als „Einsenkpunkt“ zu bezeichnen. — Entsprechend den Erfahrungen bei den üblichen Gläsern hat zwischen Transformations- und Erweichungspunkt eine sorgfältige Kühlung der Materialien bei der Herstellung zu erfolgen — ein Befund, welcher mit den Erfahrungen bei der Herstellung von Kieselglas in Übereinstimmung steht; es soll jedoch ausdrücklich darauf hingewiesen werden, daß sich das Kühlintervall von Kieselglas wohl noch bis zu höheren Temperaturen zu erstrecken hat, da sich bei diesem Material im Vergleich zu den üblichen Gläsern ein verhältnismäßig langsames Absinken des Ausdehnungsbetrages bei Temperaturen oberhalb des Erweichungspunktes zeigt. — Endlich soll hier noch daran erinnert werden, daß bei der Untersuchungsmethode der Kurve *d* — ebenso wie bei allen anderen Messungen nach dem Vergleichsverfahren — der Anpressungsdruck der Feder der Apparatur in der Weise zur Geltung kommen dürfte, daß besonders bei hohen Temperaturen die Ausdehnungswerte leicht etwas niedriger gefunden werden als bei direkten Messungen, vgl. beispielsweise W. M. Cohn.<sup>2)</sup>

Weiterhin soll auf einige Untersuchungen hingewiesen werden, deren Resultate von den vorstehenden abweichen: In den Kurven *e* und *f* der Fig. 1 ist das Ausdehnungsverhalten eines Quarzglasstabes (Bezeichnung: *Q XVI*) im Temperaturintervall 0—950° C nach Messungen mit dem Komparator bzw. eines Quarzglasstabes (Bezeichnung: *Q VI*) im Temperaturgebiet 0 bis

1) Willi M. Cohn. Erscheint im „Journ. of the American Ceramic Society“ und im „Sprechsaal“. 1930.

2) Vgl. Fußnote 14, S. 495.

Ta-

Komparatormessungen der Verlängerung  $\Delta l$  in Millimetern für 1 m  
gekühlte Kiesel-

Material					
Q VI (Quarzglas)	Temperatur in °C . . . .	18,6	390	502	636
	Verlängerung $\Delta l$ in mm/m	—	0,072	0,123	0,174
	Länge in mm . . . . .	195,623	195,637	195,647	195,657
Q XVI (Quarzgut)	Temperatur in °C . . . .	17,8	288	335	472
	Verlängerung $\Delta l$ in mm/m	—	0,091	0,101	0,188
	Länge in mm . . . . .	197,182	197,200	197,202	197,219

1200° C nach Messungen gleicher Art dargestellt; in Tab. 5 sind einige Ergebnisse der Komparatormessungen wiedergegeben.

Die Kurven *e* und *f* zeigen zunächst einmal bedeutend geringere Ausdehnungswerte als bei den übrigen Substanzen gefunden. Weiterhin tritt bei einer Temperatur von etwa 650° C eine Kontraktion auf, welche oberhalb von 700° C wiederum in eine Expansion übergeht. Wird die Erhitzung der Materialien unterhalb von 1000° C abgebrochen (Beispiel Q XVI), so ergibt sich nach der Abkühlung eine bleibende Verkürzung der Probekörper gegenüber der ursprünglichen Länge; auch bei neuerlicher Erhitzung des Materials zeigt sich gleichartiger Kurvenverlauf und bleibende Verkürzung. — Wird die Erhitzung bis zu höheren Temperaturen als 1000° C geführt (Beispiel Q VI), so zeigt sich eine erhebliche Verlängerung der Probekörper zwischen 975 und 1125° C, somit etwa der gleichen Temperatur wie bei Kurve *d* beobachtet, anschließend geringerer Anstieg. Der Beginn der Kontraktion liegt hier oberhalb von 1190° C; die Kontraktion selbst konnte nicht mehr erfaßt werden (vgl. oben). Wird das Material von 1190° C auf Zimmertemperatur abgekühlt, so ergibt sich eine bleibende Verlängerung von beträchtlicher Größe.

Das Verhalten der Materialien Q VI und Q XVI zeigt, daß diese Substanzen *nicht richtig gekühlt* sein dürften, so daß sie Spannungen bei Zimmertemperatur aufweisen; auch hier erinnert die Form der Kurven an die eines schlecht gekühlten Glases, wie es in meiner obenerwähnten Arbeit wiedergegeben ist.<sup>1)</sup> Dieser Befund steht in Übereinstimmung mit den Ergebnissen von Souder und Hidnert, dem National Physical

1) Vgl. Fußnote 1, S. 503.



belle 5

Stablänge in Abhängigkeit von der Temperatur für schlecht  
glasmaterialien.

707	813	900	947	1034	1100	1135	1187	17,8
0,102	0,138	0,174	0,189	0,271	0,450	0,491	0,537	0,230
195,643	195,650	195,657	195,660	195,676	195,711	195,719	195,728	195,668
645	702	807	893	938	18,0			
0,223	0,238	0,172	0,183	0,198	-0,025			
197,226	197,229	197,216	197,218	197,221	197,177			

Laboratory of England und anderen, welche ebenfalls fanden, daß das Ausdehnungsverhalten von Kieselglas durch die Vorbehandlung des Materials stark beeinflußt werden kann.

Endlich soll darauf hingewiesen werden, daß meine Untersuchungen eine einfache Erklärungsmöglichkeit für die in den Ausdehnungs-Temperatur-Kurven von Kieselglas beobachteten Unstetigkeiten ergeben — lassen sich doch diese Anomalien auf die bei den üblichen Gläsern bekannten Erscheinungen zurückführen — welche sich auch im Kieselglas abspielen dürften, vgl. hierzu beispielsweise die zusammenfassenden Darstellungen von Sosman<sup>1)</sup> und Eitel.<sup>2)</sup>

Überblickt man die Ergebnisse der Messungen an Kieselglas, so zeigt sich, daß nur ein *richtig thermisch behandeltes* Material als Normalmaterial für Ausdehnungsmessungen an festen Körpern und auch dieses nur *bis zu Temperaturen von 1000° C* in Betracht kommt.

#### b) Zirkondioxyd

Von den verschiedenen Materialien, welche für Arbeiten bei hohen Temperaturen zur Verfügung stehen, schien mir zunächst Zirkondioxyd als Normalmaterial für Ausdehnungsmessungen bis zu sehr hohen Temperaturen geeignet, liegt doch nach den Angaben von Podszus<sup>3)</sup> und Henning<sup>4)</sup> der Schmelzpunkt dieses Materials bei 2700—3000° C.

In vielen älteren Arbeiten findet sich der Hinweis, daß

1) R. B. Sosman, The properties of silica. The Chemical Catalog Co., New York 1927.

2) W. Eitel, Physikalische Chemie der Silikate. Voss, Leipzig 1929.

3) E. Podszus, Z. angew. Chem. **30**. S. 17. 1917.

4) F. Henning, Temperaturmessung. Handb. Phys. (Geiger-Scheel) **9**. S. 521. 1926.

Zirkondioxyd, welches nur geringe Mengen Verunreinigungen enthält, eine Ausdehnung aufweist, welche nicht viel größer ist als die von Kieselglas. Diese Anschauung wurde durch Messungen widerlegt, über welche ich bereits vor längerer Zeit in einer vorläufigen Veröffentlichung berichtet habe<sup>1)</sup>, in der ich zeigte, daß die mittleren linearen Ausdehnungskoeffizienten von Zirkondioxyd in Wirklichkeit um eine Zehnerpotenz höher liegen.

In der Zwischenzeit habe ich mit Hilfe der direkten und der Vergleichsmethode das Ausdehnungsverhalten von Zirkondioxyd eingehend bis zu Temperaturen von etwa  $1400^{\circ}\text{C}$  untersucht. Hierbei gelangten Materialien zur Anwendung, welche in verschiedener Weise hergestellt und verschieden hoch gebrannt waren. Über diese Untersuchungen berichte ich ausführlich an anderer Stelle.<sup>2)</sup> Im folgenden möchte ich als ein Beispiel das Ausdehnungsverhalten eines bei  $1800^{\circ}\text{C}$  kurzzeitig gebrannten Zirkondioxydmaterials nach dieser Arbeit besprechen — bis zu  $900^{\circ}\text{C}$  wurden die Untersuchungen mit Hilfe der Vergleichsmethode, bis zu mehr als  $1300^{\circ}\text{C}$  mit Hilfe des Komparators durchgeführt.

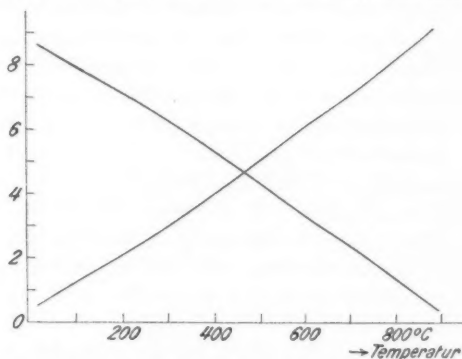
Als Beispiel für das Arbeiten der selbstregistrierenden Apparatur sei in Fig. 2 eine Originalaufnahme des Ausdehnungsverhaltens eines Zirkondioxydmaterials im Vergleich zu Kieselglas im Temperaturintervall  $0-900^{\circ}\text{C}$  wiedergegeben (Ordinate: Ausdehnungsdifferenz in einer willkürlichen Einheit, Abszisse: Temperatur); man erkennt, daß die Apparatur *direkt* die Ausdehnungsdifferenz in Abhängigkeit von der Temperatur zu ermitteln erlaubt. (Es ergeben sich zwei spiegelbildliche Kurven.) — Fig. 3 gibt die Mittelwertkurve der Ausdehnung dieses Materials in Abhängigkeit von der Temperatur wieder, welche durch Zusammenfassen der Messungen an mehreren Stäben und in verschiedenen Temperaturbereichen erhalten ist; die Darstellung ist die gleiche wie in Fig. 1, doch ist der Ordinatenmaßstab verkleinert.

Das bei  $1800^{\circ}\text{C}$  kurzzeitig gebrannte Material zeigt zunächst einen geradlinigen Anstieg der Verlängerung mit wachsender Temperatur; bei  $240^{\circ}\text{C}$  erfolgt eine Richtungs-

1) Willi M. Cohn, Ber. D. Keram. Ges. 9. S. 16—18. 1928. (Vorläufige Mitteilung.)

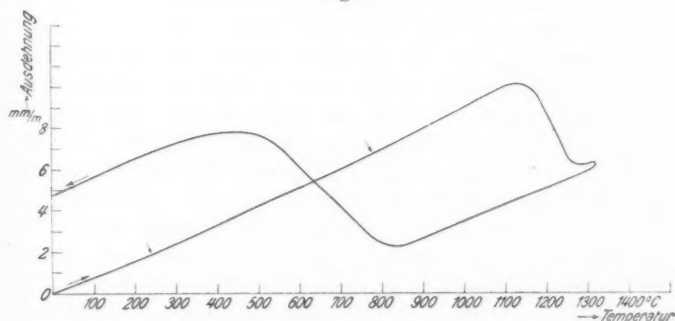
2) Vgl. Fußnote 2, S. 497.

änderung in der Kurve, anschließend geradliniger Anstieg, bei  $780^{\circ}\text{C}$  eine neue Richtungsänderung mit folgendem stärkeren Anstieg. Wird die Erhitzung des Materials unterhalb  $1000^{\circ}\text{C}$  abgebrochen, so ergibt sich — nach einigen Erhitzungen —



Ausdehnungsverhalten von Zirkondioxyd, kurzzeitig bei  $1800^{\circ}\text{C}$  gebrannt, im Vergleich zu Kieselglas

Fig. 2



Ausdehnungsverhalten von Zirkondioxyd, kurzzeitig bei  $1800^{\circ}\text{C}$  gebrannt, Temperaturintervall  $0-1400^{\circ}\text{C}$

Fig. 3

für die Erwärmungs- und Abkühlungskurven identischer Verlauf, irreversible Längenänderungen werden nicht beobachtet.

Wird die Erhitzung des Materials über  $1000^{\circ}\text{C}$  ausgedehnt, so zeigt sich, daß — beginnend bei etwa  $1050^{\circ}\text{C}$  — die Zunahme in der Verlängerung der Proben geringer wird.

Bei  $1120^{\circ}\text{C}$  setzt eine Kontraktion ein, welcher dann bei etwa  $1280^{\circ}\text{C}$  eine Expansion folgt, die bis zu ungefähr  $1320^{\circ}\text{C}$  verfolgt werden konnte. Wird jetzt die Abkühlung eingeleitet, so zeigt sich ein wesentlich anderer Kurvenverlauf als bei der Erhitzung: Bis etwa  $840^{\circ}\text{C}$  erfolgt eine Kontraktion, dann eine *erhebliche Expansion* bis zu etwa  $450^{\circ}\text{C}$ , schließlich eine neuerliche Kontraktion bis zu Zimmertemperatur; nach der Abkühlung zeigt sich eine beträchtliche Verlängerung des Materials gegenüber seiner Ausgangslänge. Die Tab. 1—4 enthalten die zahlenmäßigen Ergebnisse der Messungen bis zu  $1000^{\circ}\text{C}$  (reversibles Ausdehnungsverhalten).

Bezüglich der Ursachen für das Ausdehnungsverhalten von Zirkondioxyd bei der Erhitzung und Abkühlung muß auf die ausführliche Darstellung verwiesen werden.<sup>1)</sup> (Auftreten verschiedener Modifikationen). Weiterhin wird dort gezeigt, daß in Abhängigkeit von der Höhe der Brenntemperatur und der Dauer des Brennens Zirkondioxydmodifikationen erhalten werden können, welche in den Ausdehnungs-Temperatur-Kurven Unstetigkeiten auch bei Temperaturen von weniger als  $1000^{\circ}\text{C}$  aufweisen (hierbei ergeben sich einige Parallelen zwischen den Modifikationen des  $\text{SiO}_2$ ,  $\text{TiO}_2$  und  $\text{ZrO}_2$ ).

Allgemein zeigt es sich, daß die kurzzeitig gebrannten Zirkondioxyde nur bis zu etwa  $900$ — $1100^{\circ}\text{C}$  ein Ausdehnungsverhalten aufweisen, welches als reversibel anzusehen ist; bei der Erhitzung auf höhere Temperaturen ergeben sich erhebliche Unstetigkeiten in den Ausdehnungs-Temperatur-Kurven, sowie irreversible Längenänderungen nach der Abkühlung auf Zimmertemperatur; besonders gefährlich ist die starke Expansion bei der Abkühlung von hoher Temperatur, welche leicht zu Zerstörungen an den Gegenständen führen kann. Infolgedessen dürfte vorläufig eine Verwendung von Zirkondioxyd als Normalmaterial nur *bis zu Temperaturen von  $1000^{\circ}\text{C}$*  in Betracht kommen, wenn es gelingt, das Material immer in gleicher Beschaffenheit und unter genau definierten Bedingungen herzustellen.

#### c) Keramische Materialien

Die Untersuchungen erstreckten sich weiterhin auf zahlreiche Materialien, welche von der keramischen Industrie her-

1) Vgl. Fußnote 2, S. 497.

gestellt und bei Temperaturen bis zu  $1400^{\circ}\text{C}$  und mehr gebrannt waren. Bei den meisten derartigen Massen ergaben sich jedoch bereits im Temperaturgebiet  $0-900^{\circ}\text{C}$  Ausdehnungs-Temperatur-Kurven, welche erhebliche Unstetigkeiten infolge von Reaktionen innerhalb der Substanzen aufweisen — andere Substanzen zeigten trotz wiederholter Erhitzung und Abkühlung immer wieder bleibende Längenänderungen, ohne daß ein Endzustand erreicht werden konnte; alle diese Massen mußten daher für die Zwecke der vorliegenden Untersuchung ausscheiden; vgl. hierzu auch die Untersuchungen von Holborn und Grüneisen<sup>1)</sup>, welche zu ähnlichen Ergebnissen für Porzellan gelangten. Über die Ergebnisse meiner Messungen berichte ich in anderem Zusammenhang.<sup>2)</sup> — Nur zwei der untersuchten Materialien weisen ein Verhalten auf, welches ihre Verwendung als Normalmaterialien für Ausdehnungsmessungen bis zu mehr als  $1000^{\circ}\text{C}$  möglich erscheinen läßt, wie ich im folgenden zeigen werde.

#### 1. Neuartige Steinzeugmasse

Diese neuartige Steinzeugmasse, über deren Zusammensetzung und Ausdehnungsverhalten von Singer<sup>3)</sup> und W.M.Cohn<sup>4)5)</sup> berichtet wird (Hersteller: Deutsche Ton- und Steinzeugwerke, Berlin-Charlottenburg, Brenntemperatur etwa  $1400^{\circ}\text{C}$ ), ergibt beispielsweise die in Fig. 4 dargestellte Ausdehnungs-Temperatur-Kurve für das Intervall  $0-1250^{\circ}\text{C}$  (Kurve a). Im Gegensatz zu den üblichen Steinzeugmassen, welche infolge der bei der Erhitzung auftretenden Effekte — insbesondere Cristobalit- und Quarzumwandlungen — erhebliche Unstetigkeiten bei der Erhitzung aufweisen<sup>4)</sup>, zeigt sich hier ein gleichförmiger Anstieg der Ausdehnung mit wachsender Temperatur; Unstetigkeiten können im Kurvenverlauf bis zu Temperaturen von  $1200^{\circ}\text{C}$  nicht gefunden werden. Wird das Material nach der Erhitzung bis  $1200^{\circ}\text{C}$  auf Zimmertemperatur abgekühlt, so treten keine bleibenden Längenänderungen auf. Wird die

1) L. Holborn u. E. Grüneisen, Ann. d. Phys. 6. S. 136. 1901.

2) Willi M. Cohn. Erscheint in „Keramische Rundschau“. 1930.

3) F. Singer, Ber. D. Keram. Ges. 10. S. 269. 1929.

4) Willi M. Cohn, Ber. D. Keram. Ges. 10. S. 271. 1929.

5) Willi M. Cohn. Erscheint in „Ber. D. Keram. Ges.“ 1930.

Erhitzung hingegen bis zu höheren Temperaturen geführt, so ergibt sich bei  $1250^{\circ}\text{C}$  eine geringere Zunahme im Kurvenanstieg, welche darauf hindeutet, daß hier Vorgänge innerhalb der Masse einsetzen (Spinellbildung usw.), welche erhebliche Effekte bedingen; nach der Abkühlung wird dann dementsprechend eine irreversible Längenänderung erhalten.

Von besonderem Interesse sind weiterhin die *geringen Ausdehnungswerte*, welche die neuartigen Steinzeugmassen zeigen und welche ganz bedeutend niedriger liegen als die der bis-

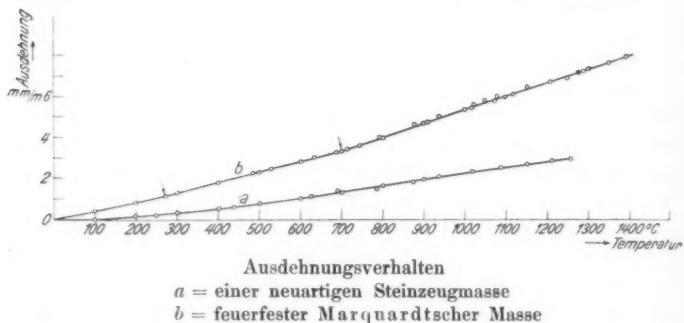


Fig. 4

her bekannten keramischen Massen. Erst bei Temperaturen von mehr als  $200^{\circ}\text{C}$  werden die Ausdehnungswerte von Kieselglas überschritten (vgl. die Tabbl. 1—4, welche die zahlenmäßigen Ergebnisse der Untersuchungen enthalten). Wesentlich erscheint es fernerhin, daß die neuartigen Steinzeugmassen immer in gleicher Beschaffenheit hergestellt werden können, so daß die oben aufgestellten Vorbedingungen erfüllt sind, um diese Massen bis zu Temperaturen von  $1200^{\circ}\text{C}$  als Normalmaterialien für Ausdehnungsmessungen an festen Körpern verwenden zu können.

## 2. Feuerfeste Marquardtsche Masse

Die von der Staatlichen Porzellanmanufaktur Berlin hergestellte feuerfeste Marquardtsche Masse (Brenntemperatur etwa  $1440^{\circ}\text{C}$ ) zeigt im Temperaturgebiet  $0-1400^{\circ}\text{C}$  ein Ausdehnungsverhalten, welches ebenfalls in Fig. 4 (Kurve b) dargestellt ist. Man erkennt, daß die Ausdehnungs-Temperatur-

Kurve im allgemeinen geradlinig verläuft, bei 270 und 700° C sind geringe Richtungsänderungen im Kurvenverlauf zu beobachten, welche auf Effekte in der Masse hinweisen. Wesentlich ist es, daß bei der Erhitzung und Abkühlung des Materials identische Kurven erhalten werden (die Richtungsänderungen treten immer bei gleichen Temperaturen und unabhängig von der Erhitzungsgeschwindigkeit auf) und daß auch bei längerer Benutzung keine irreversiblen Längenänderungen beobachtet werden. — Die zahlenmäßigen Ergebnisse der Untersuchungen sind in den Tab. 1—4 aufgeführt, sie zeigen eine gute Übereinstimmung mit den Ergebnissen früherer Messungen von Rieke<sup>1)</sup>, welche zwischen 20 und 700° C vorgenommen waren. — Es sei schließlich darauf verwiesen, daß dieses Material immer in gleicher Beschaffenheit und zu geringem Preise geliefert werden kann.

Mithin erfüllt die feuerfeste Marquardtsche Masse ebenfalls die oben aufgestellten Vorbedingungen zur Verwendung als Normalmaterial für Ausdehnungsmessungen, und zwar bis zu Temperaturen von 1400° C. Infolge der guten Verarbeitbarkeit des Materials können aus ihm beliebige Gegenstände hergestellt werden, wie sie für Ausdehnungsmessungen nach der Vergleichsmethode benötigt werden (vgl. unten).

#### V. Diskussion der Versuchsergebnisse

Als wesentliches Ergebnis der Untersuchungen ist der Befund anzusehen, daß es heute möglich ist, Ausdehnungsmessungen nach der Vergleichsmethode bis zu mehr als 1000° C unter beliebigen Erhitzungsbedingungen vorzunehmen. Als obere Grenze für die Verwendung als Normalmaterial hat für Kieselglas die Temperatur von 1000° C zu gelten, die gleiche Grenze ist für Zirkondioxydmaterialien vorläufig anzunehmen; ich möchte jedoch darauf hinweisen, daß die Möglichkeit bestehen dürfte, daß Zirkondioxyd in Verbindung mit gewissen Zusätzen auch für höhere Temperaturen wird Verwendung finden können.

Für Ausdehnungsmessungen bis zu 1200° C können die neuartigen Steinzeugmassen zugrunde gelegt werden, welche

1) R. Rieke, Bestimmung der Wärmeausdehnung einiger keramischer Massen. Verlag Keramische Rundschau, Berlin 1914.

eine sehr gleichförmige Ausdehnung und nur geringe Ausdehnungsbeträge im Vergleich zu anderen keramischen Materialien aufweisen. Für die Vornahme von Ausdehnungsbestimmungen bis zu  $1400^{\circ}\text{C}$  ist Marquardtsche Masse heranzuziehen. Im Gegensatz zu den Metallen kann bei Verwendung der genannten Substanzen die Erhitzung in beliebiger Ofenatmosphäre vorgenommen werden.

#### VI. Schlußbemerkung

Auf Grund der vorstehenden Untersuchungsergebnisse habe ich eine Apparatur zur Durchführung von Ausdehnungsmessungen nach der Vergleichsmethode entwickelt<sup>1)</sup>, bei welcher Marquardtsche Masse als Normalmaterial verwendet wird und welche eine Weiterentwicklung der oben erwähnten Anordnung nach der Vergleichsmethode zur Vornahme von Ausdehnungsmessungen im Temperaturgebiet  $0-900^{\circ}\text{C}$  darstellt (mit dieser Apparatur ist beispielsweise Kurve *d* der Fig. 1 erhalten worden). — Es dürfte natürlich nunmehr die Möglichkeit vorliegen, auch andere Vergleichsverfahren für Ausdehnungsmessungen an festen Körpern, welche bislang unter Verwendung von Kieselglas bis zu  $900$  (maximal  $1000^{\circ}\text{C}$ ) arbeiten, durch Einführung eines der vorstehend untersuchten Normalmaterialien für Messungen bei höheren Temperaturen zu verwenden als bisher.

Meine Untersuchungen wurden mit Unterstützung der Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft durchgeführt, welche auch die Mittel für die Apparaturen bewilligte; für Überlassung der Arbeitsräume im Kaiser-Wilhelm-Institut für Silikatforschung bin ich Hrn. Prof. Dr. W. Eitel zu großem Dank verpflichtet. Mein Dank gebührt auch allen Firmen und Herren, welche die Untersuchungen durch die Bereitstellung von Mitteln gefördert haben.

---

1) Willi M. Cohn. Erscheint in „Ztschr. f. techn. Phys.“. 1930. Berlin, Dezember 1929.

(Eingegangen 15. Januar 1930)



## *Zur Theorie des Tonraumes*<sup>1)</sup>

**Von K. Schuster**

(Mit 9 Figuren)

### 1. Problemstellung

Hahnemann und Hecht<sup>2)</sup> haben den Tonraum folgendermaßen definiert: „Die Grundform des geschlossenen Schwingungsgebildes für gasförmigen oder flüssigen Aggregatzustand wird gebildet durch zwei Räume, die durch einen Kanal miteinander in Verbindung stehen. Die beiden Räume sind die Träger der potentiellen Energie des Schwingungsgebildes, während der Verbindungskanal als Sitz der kinetischen Energie gedacht ist. Die Schwingungen des Gases oder der Flüssigkeit gehen dabei derart vor sich, daß Überdruck in einem und Unterdruck im anderen Raume stetig miteinander wechseln, während durch den Verbindungskanal Medium hinüber- und herüberströmt.“

Wenn die beiden Räume unmittelbar (ohne Verbindungskanal) aneinanderstoßen, gilt nach Hahnemann und Hecht für die Eigenschwingungszahl des Tonraumes die Gleichung:

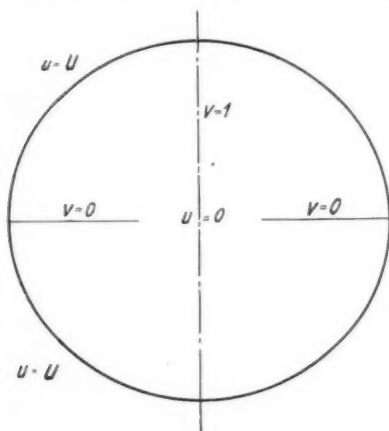
$$(1) \quad \omega^2 = 2c^2 a \cdot \frac{S_1 + S_2}{S_1 \cdot S_2}.$$

Dabei ist  $\omega$  die Kreisfrequenz,  $c$  die Schallgeschwindigkeit,  $a$  der Radius der kreisförmig gedachten Verbindungsöffnung,  $S_1$  und  $S_2$  die Volumina der beiden Räume. Es ist angenommen, daß  $a$  klein gegen den Radius der kugelförmig gedachten Räume ist. Die Formel ergibt sich durch Gleichsetzen der Ausdrücke für die Schwingungsenergie in potentieller und kinetischer Form.

1) Vorgetragen in der Sitzung des Gauvereins Thüringen-Sachsen-Schlesien der D. Phys.-Ges. am 11. Januar 1930.

2) G. Gehlhoff, Lehrbuch der techn. Physik, Bd. 1, S. 146.

Im folgenden soll das Problem des Tonraumes auf anderem Wege, nämlich als Randwertaufgabe der Wellengleichung, in Angriff genommen werden. Man wird dann nicht nur über die Frequenz des Eigentones, sondern auch über die Schwingungsverteilung Aufschluß erhalten. Dabei wird sich zeigen, wie weit von einer Trennung von Masse und Elastizität die Rede sein kann, d. h. wie weit eine punktförmige Behandlung des Problems zulässig ist. Der Tonraum soll eine ganz besondere



Tonraummodell

Fig. 1

Form haben: Er soll aus einem abgeplatteten Rotationsellipsoid bestehen, das durch eine mit einer kreisförmigen Öffnung versehene Wand in zwei gleiche Teile geteilt ist (Fig. 1).

Wir wollen die spezielle Form der elliptischen Koordinaten benutzen, die durch die Transformation gekennzeichnet ist<sup>1)</sup>:

$$(2) \quad \begin{cases} x = a \cdot \sqrt{1+u^2} \cdot \sqrt{1-v^2} \cdot \cos \varphi, \\ y = a \cdot \sqrt{1+u^2} \cdot \sqrt{1-v^2} \cdot \sin \varphi, \\ z = a \cdot u \cdot v. \end{cases}$$

1) E. Madelung, Die mathematischen Hilfsmittel des Physikers, 2. Auflage, 1925, S. 89.

Die Koordinatenbereiche sind

$$0 < v < 1 \quad \text{und} \quad -\infty < u < +\infty.$$

Jede Fläche  $u = \text{const.}$  ist die Hälfte eines Rotationsellipsoides  
(Halbachsen  $a \cdot u$  und  $a \cdot \sqrt{1 + u^2}$ ),  
jede Fläche  $v = \text{const.}$  ein Rotationshyperboloid,  
jede Fläche  $\varphi = \text{const.}$  eine Ebene durch die  $z$ -Achse.

Im besonderen ist  $u = 0$  die Öffnung des Tonraumes,  
 $v = 0$  die Trennungswand,  
 $u = \pm U$  die Außenwand des Tonraumes,  
 $v = 1$  die  $z$ -Achse.  
und  $a$  der Radius der Öffnung.

Für den räumlichen Teil des Geschwindigkeitspotentials gilt die Gleichung:

$$(3) \quad \Delta \psi + k^2 \psi = 0,$$

wo  $k$  die Wellenzahl  $\omega/c$  ist.

In den gewählten Koordinaten ist;

$$\Delta \psi = \frac{1}{a^2 \cdot (u^2 + v^2)} \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left[ (1 + u^2) \frac{\partial \psi}{\partial u} \right] + \frac{\partial}{\partial v} \left[ (1 - v^2) \frac{\partial \psi}{\partial v} \right] \right. \\ \left. + \frac{(1 + u^2)(1 - v^2)}{(u^2 + v^2)} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} \right\}.$$

Wir wollen völlige Rotationssymmetrie, also Unabhängigkeit des Vorganges von der Koordinate  $\varphi$  annehmen. Die Aufgabe lautet dann: Es ist die Funktion  $\psi = \psi(u, v)$  zu bestimmen.  $\psi$  muß die Randbedingungen erfüllen:

$$u = \pm U: \quad \frac{\partial \psi}{\partial u} = 0,$$

$$v = 0: \quad \frac{\partial \psi}{\partial v} = 0.$$

Die beiden Bedingungen entsprechen der Starrheit der Wände. Für  $\psi$  machen wir den Produktansatz:

$$\psi = F(u) \cdot G(v).$$

Die Schwingungsgleichung läßt sich separieren, und es ergeben sich für  $F$  und  $G$  die Differentialgleichungen:

$$(4a) \quad (1 + u^2)F'' + 2uF' + (\alpha^2 u^2 - \lambda) \cdot F = 0,$$

$$(4b) \quad (1 - v^2)G'' - 2vG' + (\alpha^2 v^2 + \lambda) \cdot G = 0.$$

Dabei ist  $\alpha^2 = k^2 a^2$  und  $\lambda$  eine noch zu bestimmende Konstante.

Die Randbedingungen nehmen die Form an:

$$(5a) \quad u = \pm U: F' = 0,$$

$$(5b) \quad v = 0: G' = 0.$$

## 2. Die Integration

Die Integration soll nach dem Verfahren durchgeführt werden, das Sieger<sup>1)</sup> unter Benutzung eines Gedankenganges von Mathieu auf die Beugung am elliptischen Zylinder angewandt hat und das gestattet, die Eigenfunktionen und Eigenwerte wenigstens für kleine  $\alpha^2$  zu bestimmen. Die Funktionen  $F$  und  $G$  und der Parameter  $\lambda$  werden in Potenzreihen nach  $\alpha^2$  entwickelt. Mit den Reihenansätzen geht man in die Differentialgleichungen (4a), (4b) ein, ordnet die Glieder nach Potenzen von  $\alpha^2$  und setzt die Koeffizienten gleich Null.

### a) Die Funktion $G(v)$ .

Wir beschäftigen uns zunächst mit der Gleichung (4b). Es gibt Lösungen  $G_v$  nur für diskrete Werte  $\lambda_v$  des Parameters  $\lambda$ .

Da das benutzte Näherungsverfahren nur beim Grundton zum Ziel führt<sup>2)</sup>, wollen wir uns darauf beschränken, die niedrigste Eigenfunktion  $G_0$  zu bestimmen. Wir setzen an:

$$(6) \quad G_0 = g_0 + g_2 \cdot \alpha^2 + g_4 \cdot \alpha^4 + \dots$$

$$(7) \quad \lambda_0 = c_0 + c_2 \cdot \alpha^2 + c_4 \cdot \alpha^4 + \dots$$

Die  $g_n$  sind Funktionen von  $v$ , die  $c_n$  sind Konstante. Mit diesen Ansätzen gehen wir in Gleichung (4b) ein und ordnen nach Potenzen von  $\alpha^2$ . Durch Nullsetzen der Koeffizienten ergibt sich dann:

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1 - v^2) \cdot g_n'' - 2v \cdot g_n' + v^2 \cdot g_{n-2} \\ + (c_0 g_n + c_2 g_{n-2} + \dots + c_n g_0) = 0. \end{array} \right.$$

1) B. Sieger, Ann. d. Phys. 27. S. 626. 1908.

2) Zur Bestimmung der Obertöne müßte das Ritzsche Verfahren herangezogen werden.

Für  $n = 0$  wird

$$(1 - v^2) \cdot g_0'' - 2v \cdot g_0' + c_0 g_0 = 0.$$

Das ist die Legendresche Differentialgleichung. Daher ist

$$\begin{aligned} c_0 &= \nu \cdot (\nu + 1) \\ g_0 &= P_\nu \end{aligned} \quad \nu = 0, 1, 2 \dots$$

Da wir nur die niedrigste Eigenfunktion  $\nu = 0$  erhalten wollen, wird

$$(9) \quad \begin{cases} c_0 = 0, \\ g_0 = 1. \end{cases}$$

Für  $n > 0$  setzen wir an:

$$(10) \quad g_n = \sum_{m=2, 4, \dots, n} A_{n,m} \cdot v^m.$$

Durch den Ansatz (9) und (10) wird die Randbedingung (5b) erfüllt. Geht man mit dem Polynomansatz (10) in Gleichung (8) ein, ordnet die Glieder nach Potenzen von  $v^2$  und setzt die Koeffizienten gleich Null, so ergibt sich für die  $A_{n,m}$  die Rekursionsformel

$$(11) \quad \begin{cases} (m+2) \cdot (m+1) \cdot A_{n,m+2} - (m+1) \cdot m \cdot A_{n,m} \\ \quad + A_{n-2,m-2} + \sum_{r=2, 4, \dots, n-m} c_r A_{n-r,m} = 0, \\ m = 0, 2, 4, \dots, n. \end{cases}$$

Bei der Ausrechnung ist zu beachten, daß  $A_{00} = 1$  ist und daß für  $i \neq 0$  die  $A_{ik} = 0$  werden, wenn  $k > i$  oder  $k \leq 0$  ist.

Für  $n = 2$  ist:

$$\begin{aligned} m = 2: & \quad -6 A_{22} + 1 = 0 \\ m = 0: & \quad 2 A_{22} + c_2 = 0 \end{aligned}$$


---


$$A_{22} = + \frac{1}{6}$$

$$c_2 = - \frac{1}{3}$$

Für  $n = 4$  ist:

$$\begin{array}{rcl}
 m = 4: & -20 A_{44} + A_{22} + 0 \\
 m = 2: & 12 A_{44} - 6 A_{42} + c_2 A_{22} = 0 \\
 m = 0: & 2 A_{42} + c_4 = 0
 \end{array}$$


---


$$\begin{array}{l}
 A_{44} = + \frac{1}{120} \\
 A_{42} = + \frac{1}{135} \\
 c_4 = - \frac{2}{135}
 \end{array}$$

Für  $n = 6$  ist:

$$\begin{array}{rcl}
 m = 6: & -42 A_{66} + A_{44} = 0 \\
 m = 4: & 30 A_{66} - 20 A_{64} + A_{42} + c_2 A_{44} = 0 \\
 m = 2: & 12 A_{64} - 6 A_{62} + c_2 A_{42} + c_4 A_{22} = 0 \\
 m = 0: & 2 A_{62} + c_6 = 0
 \end{array}$$


---


$$\begin{array}{l}
 A_{66} = + \frac{1}{5040} \\
 A_{64} = + \frac{1}{1890} \\
 A_{62} = + \frac{2}{8505} \\
 c_6 = - \frac{4}{8505} \\
 \text{usw.}
 \end{array}$$

Es ist also

$$(12) \quad -\lambda_0 = \frac{1}{3} \alpha^2 + \frac{2}{135} \alpha^4 + \frac{4}{8505} \alpha^6 + \dots$$

und

$$(13a) \quad \left\{ \begin{array}{l} G_0(v) = 1 + \frac{1}{6} v^2 \cdot \alpha^2 + \left( \frac{1}{135} v^2 + \frac{1}{120} v^4 \right) \cdot \alpha^4 \\ \quad + \left( \frac{2}{8505} v^2 + \frac{1}{1890} v^4 + \frac{1}{5040} v^6 \right) \alpha^6 + \dots \end{array} \right.$$

oder

$$(13b) \quad \left\{ \begin{array}{l} G_0(v) = 1 + \frac{(\alpha v)^2}{2!} \cdot \left( \frac{1}{3} + \frac{2}{135} \alpha^2 + \frac{4}{8505} \alpha^4 + \dots \right) \\ \quad + \frac{(\alpha v)^4}{4!} \cdot \left( \frac{1}{5} + \frac{4}{315} \alpha^2 + \dots \right) \\ \quad + \frac{(\alpha v)^6}{6!} \cdot \left( \frac{1}{7} + \dots \right) \\ \quad + \dots \end{array} \right.$$

b) Die Funktion  $F(u)$ 

Wir wenden uns jetzt der Differentialgleichung (4a) zu. Da der Tonraum völlig symmetrisch zur Öffnungsebene  $u = 0$  angenommen ist, können die Eigenfunktionen  $F$  nur gerade oder ungerade sein. Bei ungeradem  $F$  stellt die Öffnungsebene  $u = 0$  eine Druckknotenfläche dar, bei geradem  $F$  eine Geschwindigkeitsknotenfläche. Die niedrigste Eigenfunktion  $F$ , die mit  $G_0$  kombinieren kann, ist die ungerade Funktion  $F_1$ , die im Bereich  $-U < u < +U$  nur bei  $u = 0$  verschwindet. Die Lösung  $\psi = G_0 \cdot F_1$  ist daher dem Grundton zugeordnet. Entsprechend der Gleichung (6) machen wir den Ansatz:

$$(14) \quad F_1 = f_0 + f_2 \cdot u^2 + f_4 \cdot u^4 + \dots$$

Die  $f_n$  sind Funktionen von  $u$ .

Durch Einsetzen in Gleichung (4a) erhalten wir dann analog zu (8):

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} (1+u^2) \cdot f_n'' + 2u \cdot f_n' + u^2 \cdot f_{n-2} - (c_2 f_{n-2} + c_4 f_{n-4} \\ + \dots + c_n f_0) = 0. \end{aligned} \right.$$

Dabei ist schon die Gleichung  $c_0 = 0$  benutzt.

Für  $n = 0$  wird also:

$$(1+u^2) \cdot f_0'' + 2u \cdot f_0' = 0.$$

Als ungerade Lösung ergibt sich

$$f_0 = \operatorname{arctg} u.$$

Für  $n > 0$  setzen wir an:

$$(16) \quad f_n = \operatorname{arctg} u \cdot \sum_m^{2,4,\dots,n} B_{nm} \cdot u^m + \sum_m^{1,3,\dots,n-1} C_{nm} \cdot u^m.$$

Durch Einsetzen in (15) ergeben sich die Rekursionsformeln:

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} (m+2) \cdot (m+1) \cdot B_{n,m+2} + (m+1) \cdot m \cdot B_{nm} \\ + B_{n-2,m-2} - \sum_r^{2,4,\dots,n-m} c_r B_{n-r,m} = 0 \\ m = 0, 2, 4, \dots, n \end{aligned} \right.$$

und

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} (m+2) \cdot (m+1) \cdot C_{n,m+2} + (m+1) \cdot m \cdot C_{nm} \\ + C_{n-2,m-2} - \sum_r^{2,4,\dots,n-(m+1)} c_r C_{n-r,m} = -2(m+1) \cdot B_{n,m+1} \\ m = 1, 3, 5, \dots, n-1. \end{aligned} \right.$$

Für  $n = 2$  ist:

$m = 2:$

$6B_{22} + 1 = 0$

$m = 0:$

$2B_{22} - c_2 = 0$

$m = 1:$

$2C_{21} = -4B_{22}$

$$B_{22} = -\frac{1}{6}$$

$$c_2 = -\frac{1}{3}$$

$$C_{21} = +\frac{1}{3}.$$

Für  $n = 4$  ist:

$m = 4:$

$20B_{44} + B_{22} = 0$

$m = 2:$

$12B_{44} + 6B_{42} - c_2 B_{22} = 0$

$m = 0:$

$2B_{42} - c_4 = 0$

$m = 3:$

$12C_{43} + C_{21} = -8B_{44}$

$m = 1:$

$6C_{43} + 2C_{41} - c_2 C_{21} = -4B_{42}$

$$B_{44} = +\frac{1}{120}$$

$$B_{42} = -\frac{1}{135}$$

$$c_4 = -\frac{2}{135}$$

$$C_{43} = -\frac{1}{30}$$

$$C_{41} = +\frac{8}{135}.$$

Für  $n = 6$  ist:

$m = 6:$

$42B_{66} + B_{44} = 0$

$m = 4:$

$30B_{66} + 20B_{64} + B_{42} - c_2 B_{44} = 0$

$m = 2:$

$12B_{64} + 6B_{62} - c_2 B_{42} - c_4 B_{22} = 0$

$m = 0:$

$2B_{62} - c_6 = 0$

$m = 5:$

$30C_{65} + C_{43} = -12B_{66}$

$m = 3:$

$20C_{65} + 12C_{63} + C_{41} - c_2 C_{43} = -8B_{64}$

$m = 1:$

$6C_{63} + 2C_{61} - c_2 C_{41} - c_4 C_{21} = -4B_{62}$

$$B_{66} = -\frac{1}{5040}$$

$$B_{64} = +\frac{1}{1890}$$

$$B_{62} = -\frac{2}{8505}$$

$$c_6 = -\frac{4}{8505}$$

$$C_{65} = +\frac{1}{840}$$

$$C_{63} = -\frac{2}{315}$$

$$C_{61} = +\frac{61}{8505}.$$



Die  $B_{n,m}$  unterscheiden sich von den  $A_{n,m}$  höchstens durch das Vorzeichen; es ist nämlich

$$B_{n,m} = (-1)^{\frac{m}{2}} \cdot A_{n,m}.$$

Daß die  $c_n$  genau so herauskommen wie vorher, ist eine Kontrolle für unsere Ansätze.

Es ist also

$$(19a) \left\{ \begin{aligned} F(u) = & \operatorname{arctg} u + \left[ \left( -\frac{1}{6} u^2 \right) \cdot \operatorname{arctg} u + \frac{1}{3} u \right] \cdot \alpha^2 \\ & + \left[ \left( -\frac{1}{135} u^2 + \frac{1}{120} u^4 \right) \cdot \operatorname{arctg} u \right. \\ & + \left. \left( \frac{8}{135} u - \frac{1}{30} u^3 \right) \right] \cdot \alpha^4 \\ & + \left[ \left( -\frac{2}{8505} u^2 + \frac{1}{1890} u^4 - \frac{1}{5040} u^6 \right) \cdot \operatorname{arctg} u \right. \\ & + \left. \left( \frac{61}{8505} u - \frac{2}{315} u^3 + \frac{1}{840} u^5 \right) \right] \cdot \alpha^6 + \dots \end{aligned} \right.$$

oder

$$(19b) \left\{ \begin{aligned} F(u) = & \operatorname{arctg} u \cdot \left[ 1 - \frac{(\alpha u)^2}{2!} \cdot \left( \frac{1}{3} + \frac{2}{135} \alpha^2 + \frac{4}{8505} \alpha^4 + \dots \right) \right. \\ & + \frac{(\alpha u)^4}{4!} \cdot \left( \frac{1}{5} + \frac{4}{315} \alpha^2 + \dots \right) \\ & - \frac{(\alpha u)^6}{6!} \cdot \left( \frac{1}{7} + \dots \right) + \dots \left. \right] \\ & + \alpha \cdot \left[ \frac{\alpha u}{1!} \cdot \left( \frac{1}{3} + \frac{8}{135} \alpha^2 + \frac{61}{8505} \alpha^4 + \dots \right) \right. \\ & - \frac{(\alpha u)^3}{3!} \cdot \left( \frac{1}{5} + \frac{4}{105} \alpha^2 + \dots \right) \\ & + \frac{(\alpha u)^5}{5!} \cdot \left( \frac{1}{7} + \dots \right) + \dots \left. \right]. \end{aligned} \right.$$

Wir wollen noch einmal kurz die bisherigen Ergebnisse zusammenfassen: Wir beschränken uns darauf, den Grundton  $\omega_{10}$  des Tonraumes zu berechnen. Ihm ist die niedrigste Eigenfunktion

$$\psi_{10} = F_1 \cdot G_0$$

zugeordnet.  $\psi_{10}$  hat nur bei  $u = 0$  eine Nullstelle; beim Grundton existiert also nur eine Druckknotenfläche, nämlich die Ebene der Öffnung. Von den möglichen Eigenlösungen

$$\psi_{\mu\nu} = F_\mu \cdot G_\nu$$

schließen wir zunächst durch die Bedingung  $v = 0$  alle Oberschwingungen aus, bei denen Druckknotenflächen  $v = \text{const.}$  auftreten. Bei den übrigbleibenden Eigenschwingungen treten  $\mu$  Druckknotenflächen  $u = \text{const.}$  auf. Es sind die beiden Fälle zu unterscheiden:

1.  $\mu = \text{ungerade}$ ,  $F_\mu$  eine ungerade Funktion, d. h. die Öffnungsebene  $u = 0$  stellt eine Druckknotenfläche dar.
2.  $\mu = \text{gerade}$ ,  $F_\mu$  eine gerade Funktion, d. h. die Öffnungsebene  $u = 0$  stellt eine Geschwindigkeitsknotenfläche dar, es finden keine Schwingungen durch die Öffnung hindurch statt.

Dadurch, daß wir  $F(u)$  als ungerade Funktion ansetzen, schließen wir den Fall 2 aus. Unser Ansatz umfaßt also die Lösungen

$$\psi = \psi_{10}, \psi_{30}, \psi_{50} \dots$$

Da das Näherungsverfahren nur bei sehr kleinen Eigenwerten brauchbar ist, wird nur die Grundtonlösung  $\psi_{10}$  bestimmt.

### 3. Berechnung des Grundtones

Die Randbedingung (5a) liefert die Bestimmungsgleichung für  $\alpha^2$  und damit für den Eigenton  $\omega$ :

$$(20) \quad F'(U) = f_0'(U) + f_2'(U) \cdot \alpha^2 + f_4'(U) \cdot \alpha^4 + \dots = 0.$$

Brechen wir die Reihe mit dem Glied  $f_{2p}'(U) \cdot \alpha^{2p}$  ab, so erhalten wir für  $\alpha^2$  eine Gleichung  $p$  ten Grades. Die niedrigste positive Wurzel  $\alpha^2$  bestimmt den Grundton  $\omega$  durch die Beziehung:

$$\alpha^2 = k^2 a^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \cdot a^2.$$

Wenn  $U \gg 1$  ist, d. h. wenn die kleine Halbachse ( $a \cdot U$ ) des Tonraumellipsoids groß gegen den Radius  $a$  der Öffnung ist, genügt die erste Näherung zur Bestimmung von  $\alpha^2$ . Es wird dann

$$(21) \quad \alpha^2 = - \frac{f_0'(U)}{f_2'(U)} = \frac{1}{\frac{1}{3} U \cdot (1 + U^2) \cdot \operatorname{arctg} U - \frac{1}{6} U^2 - \frac{1}{3}}.$$

Da  $(a \cdot U)$  und  $(a \cdot \sqrt{1+U^2})$  die beiden Halbachsen des Tonraumes sind, ist

$$\frac{1}{3} U \cdot (1+U^2) = \frac{V}{4\pi a^3},$$

wenn  $V$  das Gesamtvolumen des Tonraumes darstellt. Unter Benutzung der Beziehung  $U \gg 1$  wird dann

$$a^3 = \frac{8a^3}{V}$$

oder

$$(22) \quad \omega^2 = \frac{8a^3}{V}.$$

Gleichung (22) stimmt völlig mit Gleichung (1) überein, wenn man dort  $S_1 = S_2 = \frac{1}{2} V$  setzt.

Wenn  $U$  nicht mehr groß gegen 1 ist, konvergiert die Reihe  $F'(U)$  weniger gut. Im allgemeinen müssen dann also weitere Glieder zur Berechnung von  $a^2$  herangezogen werden. Es zeigt sich aber, daß die erste Näherung noch bis  $U = 2$  hinab ganz brauchbare Werte liefert.

Tabelle

$U$	$\alpha^2$ , 1. Näh.	$\alpha^2$ , 2. Näh.	$\alpha^2$ , 3. Näh.	$\alpha$	$\sqrt{\frac{6}{\pi U \cdot (1+U^2)}}$	$\frac{ \Delta \alpha }{\alpha}$ (‰)
1	—	(4,115)	(3,224)	(1,796)	0,977	—
1,5	(1,125)	0,9557	0,9376	0,968	0,626	2,4
2	0,3717	0,3578		0,598	0,437	8,5
2,5	0,1719	0,1738		0,417	0,325	2,7
3	0,0938	0,0963		0,310	0,252	1,3
4	0,0370			0,192	0,1676	15,2
5	0,0182			0,135	0,1212	9,5
6	0,01024			0,1012	0,0929	6,8
8	0,00417			0,0646	0,0607	4,2
10	0,00209			0,0457	0,0435	3,0

In der Tabelle sind einige  $\alpha^2$ -Werte im Bereich von  $U = 1$  bis  $U = 10$  in verschiedenen Näherungen zusammengestellt. Die fünfte Spalte enthält die Werte für  $\alpha$  in der besten berechneten Näherung. In der sechsten Spalte stehen die Werte von

$$\sqrt{\frac{6}{\pi U \cdot (1+U^2)}} = \sqrt{\frac{8a^3}{V}};$$

das ist die rechte Seite der Grenzgleichung für große  $U$ -Werte:

$$\alpha = \sqrt{\frac{8a^3}{V}}.$$

In Fig. 2 ist unter Benutzung der fünften und sechsten Tabellenspalte  $\alpha$  als Funktion von  $\sqrt{\frac{8a^2}{V}}$  aufgetragen. Die gestrichelte Gerade stellt das Grenzgesetz für große  $U$  (also

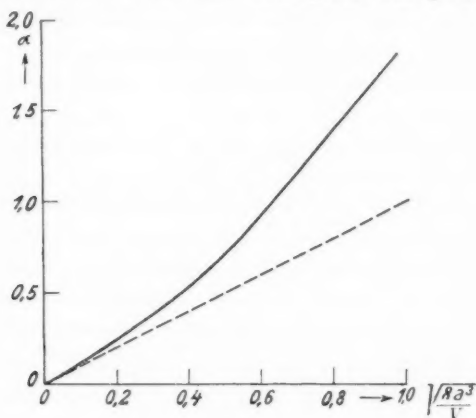
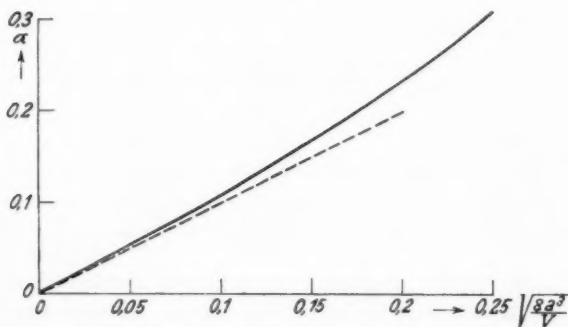


Fig. 2



Abhängigkeit des Eigenwertes von der Öffnung

Fig. 3

kleine Abszissenwerte) dar. Fig. 3 zeigt den Bereich bis  $U = 4$  in größerem Maßstabe. Bis  $U = 6$  sind die Abweichungen von dem Grenzgesetz ziemlich gering (kleiner als 8 Proz.). Darüber hinaus nehmen sie schnell zu. Bei  $U = 1,5$  ist die Frequenz des Grundtones etwa 1,55 mal so groß als die nach

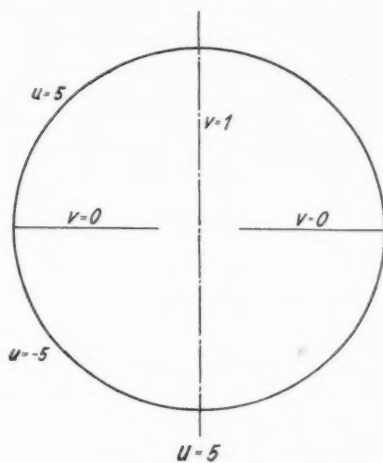
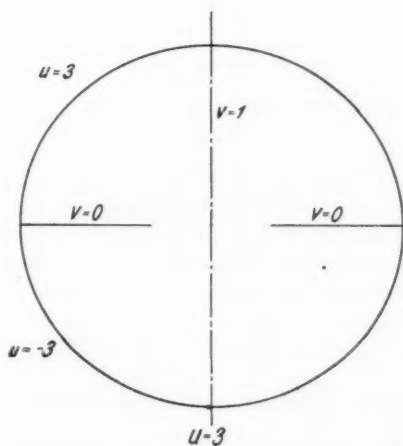


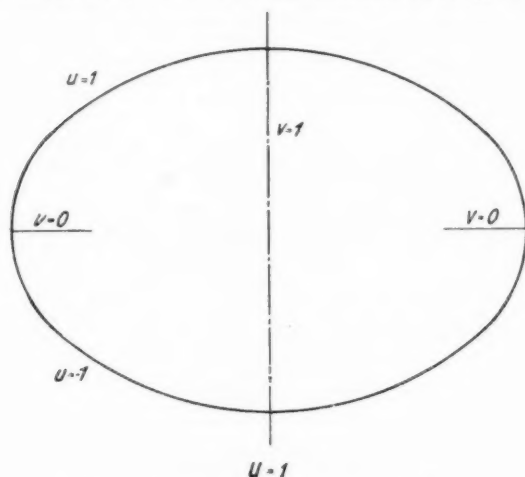
Fig. 4



Änderung der Tonraumgestalt mit der Öffnung

Fig. 5

dem Grenzesetz berechnete. Die Figg. 4—6 zeigen, wie sich infolge der besonderen Koordinatenwahl mit der Größe der Öffnung auch die Gestalt des Tonraumes ändert. Bei großem  $U$  (= Verhältnis der kleinen Halbachse zum Radius der Öffnung), also kleiner Öffnung, hat er nahezu Kugelgestalt (Fig. 4). Bei kleiner werdendem  $U$  nimmt die Exzentrizität zu (Figg. 5 und 6).



Änderung der Tonraumgestalt mit der Öffnung

Fig. 6

Um den Fehler bei der Berechnung von  $\alpha$  grob abzuschätzen, gehen wir von der Gleichung aus:

$$F'(u) = \alpha^2 \cdot Q_1 - \alpha \cdot Q_2 \cdot \arctg u + \frac{1}{1+u^2} \cdot Q_3.$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} Q_1 &= \left( \frac{1}{3} + \frac{8}{135} \alpha^2 + \frac{61}{8505} \alpha^4 + \dots \right) - \frac{(\alpha u)^2}{2!} \\ &\quad \cdot \left( \frac{1}{5} + \frac{4}{105} \alpha^2 + \dots \right) + \frac{(\alpha u)^4}{4!} \cdot \left( \frac{1}{7} + \dots \right) - \dots \\ Q_2 &= \alpha u \cdot \left( \frac{1}{3} + \frac{2}{135} \alpha^2 + \frac{4}{8505} \alpha^4 + \dots \right) - \frac{(\alpha u)^3}{3!} \\ &\quad \cdot \left( \frac{1}{5} + \frac{4}{315} \alpha^2 + \dots \right) + \frac{(\alpha u)^5}{5!} \cdot \left( \frac{1}{7} + \dots \right) - \dots \end{aligned}$$

$$Q_3 = 1 - \frac{(\alpha u)^2}{2!} \cdot \left( \frac{1}{3} + \frac{2}{135} \alpha^2 + \frac{4}{8505} \alpha^4 + \dots \right) + \frac{(\alpha u^4)}{4!} \cdot \left( \frac{1}{5} + \frac{4}{315} \alpha^2 + \dots \right) - \frac{(\alpha u)^6}{6!} \cdot \left( \frac{1}{7} + \dots \right) + \dots$$

Die Gleichung ergibt sich sofort aus der Gleichung (19b). Wir bilden jetzt  $F'(U) = 0$ . Um den Fehler von  $\alpha$  auf die Fehler von  $Q_1, Q_2, Q_3$  zurückführen zu können, differenzieren wir diese Gleichung total, wobei wir  $\alpha, Q_1, Q_2, Q_3$  als Veränderliche ansehen. Es wird dann

$$(23) \quad \Delta \alpha = \frac{\alpha^2 \Delta Q_1 - \alpha \Delta Q_2 \cdot \operatorname{arctg} U + \frac{1}{1+U^2} \cdot \Delta Q_3}{2\alpha Q_1 - Q_2 \cdot \operatorname{arctg} U}.$$

Wenn wir eine der Reihen  $Q_1, Q_2, Q_3$  bei einer bestimmten Potenz von  $(\alpha u)$  abbrechen, müssen wir zwei Fehler unterscheiden: Einmal die Vernachlässigung der höheren Potenzen von  $(\alpha u)$  und dann die Ungenauigkeit der berücksichtigten Glieder; denn die Potenzen von  $(\alpha u)$  haben ja als Koeffizienten Reihen, die nach  $\alpha^2$  fortschreiten und selbst auch wieder vorzeitig abgebrochen werden. Den zweiten Fehler wollen wir im folgenden außer acht lassen. Da es sich um alternierende Reihen handelt, ist der Fehler kleiner als das erste vernachlässigte Glied. Rechnen wir mit der  $p$ ten Näherung, so wird

$$\begin{aligned} |\Delta Q_1| &< \frac{(\alpha U)^{2p}}{(2p)!} \cdot \left( \frac{1}{2p+3} + \dots \right), \\ |\Delta Q_2| &< \frac{(\alpha U)^{2p+1}}{(2p+1)!} \cdot \left( \frac{1}{2p+3} + \dots \right), \\ |\Delta Q_3| &< \frac{(\alpha U)^{2p+2}}{(2p+2)!} \cdot \left( \frac{1}{2p+3} + \dots \right). \end{aligned}$$

Wir vernachlässigen die durch Punkte angedeuteten höheren Glieder der nach  $\alpha^2$  fortschreitenden Reihen, so daß die rechten Seiten nicht mehr streng die größtmöglichen Fehler darstellen, und setzen die so erhaltenen Ausdrücke in Gleichung (23) ein. Dann wird

$$\Delta \alpha = \frac{(\alpha U)^{2p} \cdot \alpha^2}{(2p)! (2p+3) \cdot (2\alpha Q_1 - Q_2 \operatorname{arctg} U)} \cdot \left( 1 + \frac{1}{2p+1} U \cdot \operatorname{arctg} U + \frac{1}{(2p+1)(2p+2)} \cdot \frac{U^2}{1+U^2} \right).$$

Dividieren wir noch durch  $\alpha$ , so erhalten wir den prozentualen Fehler. In der letzten Spalte der Tabelle sind die

so abgeschätzten möglichen Fehler für den  $\alpha$ -Wert der Spalte 5 angegeben. Für  $U = 1$  genügt auch die dritte Näherung noch nicht. Der im Nenner von  $\Delta\alpha$  auftretende Ausdruck

$$2\alpha Q_1 - Q_2 \cdot \arctg U$$

wird hier nahezu Null, so daß die Fehlerabschätzung — wenigstens in dieser Näherung — überhaupt versagt.

Die wirklichen Fehler der berechneten  $\alpha$ -Werte sind sicherlich erheblich kleiner als die angegebenen möglichen Fehler. Z. B. beträgt im Fall  $U = 3$  in der 2. Näherung der mögliche Fehler 1,3 Proz. Der  $\alpha$ -Wert der 1. Näherung unterscheidet sich von dem der zweiten um 1,3 Proz. Die erste Näherung kann also höchstens um 2,6 Proz. falsch sein, während man als möglichen Fehler 31,7 Proz. erhält.

#### 4. Druck- und Geschwindigkeitsverteilung

Die Verteilung der Druckschwankung im Tonraum ist durch das Skalarfeld  $\psi$ , die der Geschwindigkeit durch das Vektorfeld  $\text{grad } \psi$  gegeben. Die Verteilungskurven ändern sich natürlich mit der Gestalt des Tonraumes, also mit dem Werte  $U$ . Um schon mit der ersten Näherung auszukommen, wählen wir als Beispiel ein nicht zu kleines  $U$ , nämlich  $U = 5$  (Fig. 4).

Dann wird

$$\psi = F(u) \cdot G(v) = (f_0 + 0,0182 \cdot f_2)(g_0 + 0,0182 g_2).$$

Für einen bestimmten  $v$ -Wert, z. B. für die Symmetrieachse  $v = 1$ , wird also

$$\psi \sim F(u) = f_0 + 0,0182 f_2.$$

Fig. 7 zeigt den Verlauf von  $F(u)$ . Da auf der Symmetrieachse die Koordinate  $u$  der Koordinate  $z$  (= Abstand eines Punktes von der Ebene  $u = 0, v = 0$ ) proportional ist ( $u = \frac{z}{a}$ ), gibt die Figur auch den Verlauf der Geschwindigkeit als Funktion von  $z$  wieder. In der Öffnungsebene  $u = 0$  ist ein Druckknoten, in dem einen Teilraum herrscht Kompression, im anderen Dilatation. Der Verlauf ist durchaus nicht sinusförmig. Die Kurve steigt sehr rasch an und läuft dann bis zum Druckbauch hin sehr flach. Die Abweichung von der sinus-Form würde noch stärker sein, wenn wir ein größeres  $U$ , d. h. eine kleinere Öffnung angenommen hätten. Der Druckanstieg wäre dann noch mehr auf die unmittelbare Umgebung der Öffnung beschränkt.

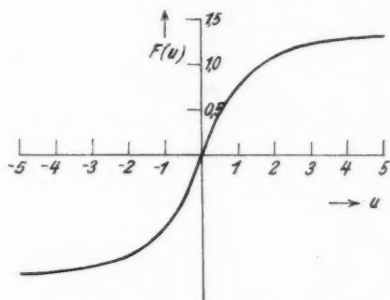


Die beiden Komponenten der Geschwindigkeit sind  
für die  $u$ -Richtung:

$$\text{grad}_u \psi = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{1+u^2}{u^2+v^2}} \cdot G(v) \cdot F'(u)$$

und für die  $v$ -Richtung:

$$\text{grad}_v \psi = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{1-v^2}{u^2+v^2}} \cdot F(u) \cdot G'(v).$$



Druckverteilung längs der Symmetrieachse

Fig. 7

Wir wollen die Geschwindigkeitsverteilung längs der Symmetrieachse ( $v = 1$ ) und in der Öffnung ( $u = 0$ ) untersuchen.

Für  $v = 1$  wird  $\text{grad}_v \psi = 0$

$$\text{grad}_u \psi = \frac{1}{a} \cdot G(1) \cdot F'(u).$$

Wie sich aus den Symmetrieverhältnissen sofort schließen läßt, schwingen die Luftteilchen längs der Achse also nur in Richtung der Achse. Die Verteilung ist durch  $F'(u)$  gegeben. Fig. 8 zeigt den Verlauf von  $F'(u)$  für den Fall  $U = 5$ . Von der Öffnung aus sinkt die Geschwindigkeit nach beiden Seiten zunächst sehr stark ab, um dann in flacherem Verlauf an der starren Wand den vorgeschriebenen Wert 0 zu erreichen.

Für  $u = 0$  wird

$$\text{grad}_v \psi = 0, \quad \text{weil} \quad F(0) = 0$$

ist, und

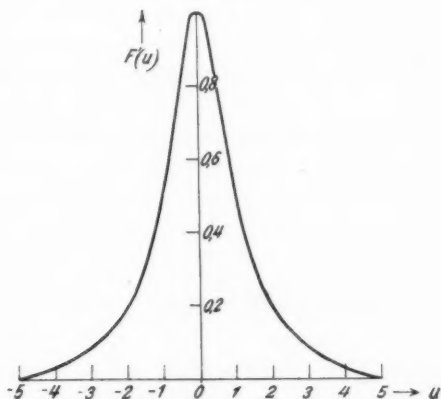
$$\text{grad}_u \psi = \frac{1}{a v} \cdot G(v) \cdot F'(0).$$

Da  $G(v)$  angenähert gleich 1 ist, ist die Geschwindigkeitsverteilung durch  $1/v$  gegeben. Bezeichnen wir den Abstand eines Punktes in der Öffnung von der Symmetrieachse mit  $r$ , so ist

$$r^2 = a^2 \cdot (1 - v^2).$$

Also wird

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2}}.$$



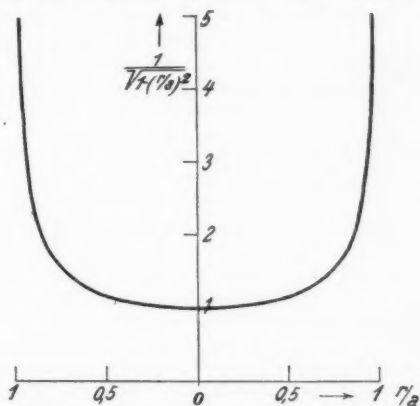
Geschwindigkeitsverteilung längs der Symmetrieachse

Fig. 8

Dieser Ausdruck ist in Fig. 9 als Funktion von  $r/a$  dargestellt. Die Geschwindigkeit nimmt von der Mitte der Öffnung nach dem Rande hin zunächst sehr langsam, dann immer schneller zu, um dann am Rande selbst unendlich groß zu werden. Diese Singularität kann man leicht vermeiden, indem man als Trennungswand der beiden Teilräume nicht das entartete Hyperboloid  $v = 0$  wählt, sondern ein Hyperboloid  $v = \varepsilon (\varepsilon \ll 1)$ . Dann ist der Rand der Trennungswand nicht mehr unendlich scharf, sondern abgerundet, und die Geschwindigkeit wird am Rande nur noch „sehr groß“ werden. Das „sehr groß“ ist natürlich nur relativ zu den Geschwindigkeitswerten an anderen Stellen des Tonraumes zu verstehen. Denn, absolut genommen, müssen die Geschwindigkeiten überall un-

endlich klein sein, damit die als Grundlage unserer Rechnung angenommene Wellengleichung gilt.

Wenn die vorliegende Berechnung auf experimentelle Untersuchungen angewandt werden soll, muß man darauf achten, daß durch Abrunden des Öffnungsrandes allzu große Schwingungsamplituden vermieden werden. Sonst könnten infolge großer Geschwindigkeiten der Luftteilchen leicht Erscheinungen auftreten, die vom Standpunkte unserer Berechnung aus, in der



Geschwindigkeitsverteilung in der Öffnungsebene

Fig. 9

ja unendlich kleine Geschwindigkeiten angenommen werden und die Reibung vernachlässigt wird, nicht erfaßt werden können, nämlich Strahlbildung (die an der Wand entlang gleitenden Luftteilchen lösen sich von der Wand los) und Wirbelbildung.

Es liegt nahe zu versuchen, die Theorie des Tonraumes auch auf den Luftresonator anzuwenden. Jede Hälfte des Tonraumes bildet ja einen Luftresonator (in unserem Falle würde er also ein Halbellipsoid sein, das durch eine mit einer kreisförmigen Öffnung versehene Wand abgeschlossen ist). Durch die Öffnung ist das Resonatorvolumen mit dem freien Luftraum verbunden. Infolge der Ausstrahlung sind jetzt freie ungedämpfte Schwingungen, wie sie bei dem nach außen völlig abgeschlossenen Tonraum auftreten können, nicht mehr möglich. Wenn man streng vorgehen will, muß man den Resonator und das Strahlungsfeld als ein System behandeln; dabei müßten die Schwingungen als freie gedämpfte Schwingungen angesetzt werden. Wenn man sich mit einer groben Annäherung begnügen will, kann man die Ausstrahlung vernachlässigen.

Man könnte denken, daß man vom Tonraum zum Luftresonator auf die gleiche Weise übergehen kann, wie man von der geschlossenen zur offenen Pfeife übergeht: Haben wir ein beiderseitig abgeschlossenes Rohr von der Länge  $2l$ , so bildet sich bei der Grundschiwingung in der Mitte [ $x = 0$ ] des Rohres ein Druckknoten aus, an den starren Wänden [ $x = \mp l$ ] Geschwindigkeitsknoten. Wenn man vom Rohr nur noch die eine Hälfte betrachtet, so steht der Innenraum des Rohres jetzt mit der Außenluft in Verbindung, es findet Ausstrahlung statt. Trotzdem gewinnen wir schon ein grobes Bild von dem Vorgang, wenn wir die Schwingungsverhältnisse ungeändert lassen (Schwingungsknoten bei  $x = -l$ ; Druckknoten bei  $x = 0$ ). Will man Tonhöhe und Schwingungsverteilung etwas genauer erhalten, so muß man eine Mündungskorrektur anbringen.

Versuchen wir den gleichen Gedankengang beim Luftresonator, so stoßen wir auf eine Schwierigkeit: Gehen wir vom Tonraum zum Resonator über, indem wir die eine Tonraumhälfte weglassen, und lassen dabei die Schwingungsverhältnisse unverändert (also Schwingungsknoten bei  $u = -U$ ; Druckknoten bei  $u = 0$ ), so kommen wir zu falschen Ergebnissen. Man kann das auch so ausdrücken: Beim Luftresonator ist die Mündungskorrektur so erheblich, daß ihre Vernachlässigung (= Annahme eines Druckknotens in der Öffnungsebene) nicht einmal ein grobes Bild liefert.

Auf einfache Weise gelingt der Übergang vom Tonraum zum Luftresonator, wenn man völlige Trennung von Masse und Elastizität annimmt, den Tonraum also als Massenpunkt behandelt. Das Bild des Tonraumes ist dann ein Massenpunkt zwischen zwei elastischen Federn. Zum Luftresonator gehen wir über, indem wir den einen Teilraum unendlich groß werden lassen und damit seine Elastizität gleich Null machen. Die eine der beiden elastischen Federn fällt also fort, die Elastizität wird auf die Hälfte reduziert (die Masse bleibt dagegen ungeändert). Der Luftresonator hat infolgedessen einen Eigenton, der im Verhältnis  $1 : \sqrt{2}$  kleiner ist als der Eigenton des Tonraumes, dessen Hälfte er bildet. Dagegen würde das Verhältnis bei der Behandlung als Randwertaufgabe  $1 : 1$  sein, wenn wir in der Öffnungsebene einen Druckknoten vorschreiben würden.

#### Zusammenfassung

Das Problem des Tonraumes wird als Randwertaufgabe behandelt. Es wird die Grundschiwingung in einem Tonraum von spezieller Form untersucht: Die Abhängigkeit der Grundtonhöhe von der Größe der Öffnung wird diskutiert; für kleine Öffnungen ergibt sich die von Hahnemann und Hecht angegebene Formel. In einem numerischen Beispiel wird die Druck- und Geschwindigkeitsverteilung im Tonraum angegeben.

Breslau, Physikal. Inst. d. Techn. Hochschule, Januar 1930.

(Eingegangen 15. Januar 1930)

